



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

JOAN SEBASTIÁN GAITÁN RIVERA

Regularização e Modos Não Lineares de Deslize em Sistemas Descontínuos

Campinas

2018

Joan Sebastián Gaitán Rivera

Regularização e Modos Não Lineares de Deslize em Sistemas Descontínuos

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Douglas Duarte Novaes

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Joan Sebastián Gaitán Rivera e orientada pelo Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G129r Gaitán Rivera, Joan Sebastián, 1993-
Regularização e modos não lineares de deslize em sistemas descontínuos /
Joan Sebastián Gaitán Rivera. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Douglas Duarte Novaes.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Campos vetoriais descontínuos. 2. Filippov, Sistemas de. 3. Perturbação
singular (Matemática). I. Novaes, Douglas Duarte, 1988-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Regularization and nonlinear sliding modes of discontinuous systems

Palavras-chave em inglês:

Discontinuous vector fields

Filippov systems

Singular perturbation (Mathematics)

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Douglas Duarte Novaes [Orientador]

Claudio Aguinaldo Buzzzi

Luis Fernando de Osório Mello

Data de defesa: 03-08-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 03 de agosto de 2018 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). DOUGLAS DUARTE NOVAES

Prof(a). Dr(a). CLAUDIO AGUINALDO BUZZI

Prof(a). Dr(a). LUIS FERNANDO DE OSÓRIO MELLO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

Aos meus pais, Ariel e Olga
À minha tia Elsy e minha avó Maria Elsa
À meus irmãos Alejandro, Daniel e Samuel

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Eu quero agradecer aos meus pais Olga Lucia e Ariel por me apoiarem nas minhas decisões e por todo o amor que vocês me deram desde que eu me lembro, apesar da distância seu amor sempre me acompanha e me encoraja a continuar melhorando.

À minha avó Elsa e minha tia Maria Elsy, quem com sua nobreza e gentileza me inspiram todos os dias para ser uma pessoa melhor. À meu irmão Alejandro e meus primos Daniel e Samuel (a quem considero e quero como meus irmãos) obrigado por ser uma motivação permanente na minha vida.

À Unicamp e especialmente ao Imecc, por me dar a oportunidade de viajar ao Brasil e estudar nesta excelente e fantástica Universidade, estes dois anos representaram em mim um enorme crescimento tanto no acadêmico quanto no pessoal.

Ao Professor Douglas Novaes pelo grande apoio, dedicação e confiança que meu deu neste último ano, obrigado por ser uma inspiração para mim como pessoa, docente e pesquisador.

À meus amigos da graduação Andres Galindo e Diego Diaz, por me motivar a continuar com meus estudos de pós-graduação, pelo apoio que me deram semanas antes de viajar aqui e por continuar matendo esta boa amizade.

À todos os amigos e colegas com quem aprendi e cresci aqui no Imecc. Dois anos atrás, antes de viajar, nunca imaginei que pudesse conhecer tantas pessoas incríveis e gentis como aconteceu nestes últimos dois anos. Obrigado por toda sua ajuda e apoio, vocês também foram fundamentais para a elaboração e conclusão bem sucedida deste trabalho. Especialmente eu quero agradecer a Daniela Martinez, Ever Ticoná, Diana Otálora, Carlos Bassani, Mayara Duarte, Juan Munir, Aydee Santana, Luan Ferreira, Bruno Gomes e todas as pessoas que de alguma maneira fizeram parte de minha vida nesses dois anos, por me permitir compartilhar grandes momentos a seu lado, sem dúvida, foi uma honra para mim ter tido a oportunidade de estudar e aprender com vocês.

Resumo

Esta dissertação se divide em duas partes. A primeira é composta pelos Capítulos 1 e 2, onde apresentamos as convenções de Filippov para o estudo dos sistemas dinâmicos descontínuos e uma introdução à teoria geométrica de perturbação singular, respectivamente. A segunda parte consiste dos Capítulos 3 e 4. No Capítulo 3 desenvolvemos as recentes extensões das convenções de Filippov para soluções de sistemas dinâmicos descontínuos, assim introduzimos o conceito dos modos não lineares de deslize e mostramos alguns resultados que relacionam a dinâmica gerada por esses modos com a dinâmica do sistema regularizado nesta abordagem. Finalmente, no Capítulo 4 aplicamos a teoria dos Capítulos anteriores para estudar um oscilador amortecido. Mostramos que usando uma combinação não linear podemos modelar de forma mais adequada a força de atrito comparado com o análise que se obtém mediante as convenções de Filippov.

Palavras-chave: Campos vetoriais descontínuos, regularização, sistemas de Filippov, modos não lineares de deslize, perturbação singular (Matemática).

Abstract

This work splits into two parts. The first part consist of Chapters 1 and 2, where we present the Filippov's conventions for the study of the discontinuous vector fields and an introduction to the geometric singular perturbation theory, respectively. The second part consist of Chapters 3 and 4. In Chapter 3, we develop the recent extensions of the Filippov's conventions for solutions of discontinuous differential systems, which is the concept of nonlinear sliding modes and we prove some results that relate the dynamics generated by these modes with the dynamics of the regularized system. Finally, in Chapter 4 we apply the theory of previous Chapters to study a dry-friction oscillator. We show that using a nonlinear combination we can modelling more appropriately the friction force of the problem compared with the analysis that we get by the Filippov's convention.

Keywords: Discontinuous vector fields, regularization, Filippov systems, nonlinear sliding modes, singular perturbation (Mathematics).

Sumário

	Introdução	10
1	PRELIMINARES	12
1.1	Introdução aos sistemas de Filippov	12
1.2	Regiões de costura e deslize	16
1.3	Singularidades	21
2	TEORIA GEOMÉTRICA DE PERTURBAÇÃO SINGULAR	27
2.1	Teoremas de Fenichel	27
2.2	Regularização de sistemas de Filippov	29
3	MODOS NÃO LINEARES DE DESLIZE	35
3.1	Introdução	35
3.2	Costura e modos não lineares de deslize	36
3.3	Regularização dos modos não lineares de deslize	39
3.4	Soluções, estabilidade e singularidades	42
4	OSCILADOR AMORTECIDO	47
4.1	Introdução ao modelo	47
4.2	Análise do modelo mediante as convenções de Filippov	49
4.3	Análise do modelo assumindo modos não lineares de deslize	52
	REFERÊNCIAS	55

Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos suaves por partes (SDSP) teve seu início aproximadamente na primeira metade do século passado com o estudo da dinâmica e estabilidade de alguns sistemas descontínuos em engenharia mecânica e circuitos. Porém naquela época ainda não se tinha bem definido a noção de solução para um campo vetorial descontínuo, dadas as diversas possibilidades que podemos ter para as trajetórias na descontinuidade. Somente em 1988 o matemático Aleksei Federovich Filippov estabeleceu em [6] convenções consistentes para o que seria a solução de uma EDO descontínua. Na atualidade as ideias introduzidas por Filippov continuam sendo fundamentais no estudo dos SDSP e, desde então, foram publicados numerosos artigos e livros que enriqueceram esta área, bem como trabalhos que aplicam a teoria dos SDSP em problemas da Física, como por exemplo interruptores em elétrica, impacto de corpos rígidos ou sistemas massa-mola sobre superfícies rugosas.

No Capítulo 1 é feita uma breve introdução da Teoria Qualitativa dos SDSP que fornece os resultados preliminares a serem utilizados no restante do trabalho. Neste sentido introduzimos o formalismo de Filippov para os SDSP, ilustramos as possibilidades para as soluções e estudamos diferentes tipos de singularidades para campos vetoriais descontínuos.

Uma vez familiarizados com a teoria básica dos SDSP podemos perceber que ao permitirmos descontinuidades nas equações diferenciais adicionamos mais riqueza na dinâmica. Recentemente, em ([2], [13], [17]) foi mostrado como a Teoria Geométrica de Perturbação Singular (TGPS) pode ser aplicada para estudar a geometria dos fluxos numa vizinhança da descontinuidade em diferentes dimensões. Sendo assim no Capítulo 2 introduzimos a TGPS e o conceito de regularização para sistemas de Filippov a fim de mostrar que a dinâmica de deslize de um SDSP “persiste” sobre uma certa variedade invariante do sistema regularizado.

Filippov considerou o fecho convexo dos campos vetoriais para estudar um sistema suave por partes na descontinuidade o qual foi considerado como padrão. Em 2013, Mike Jeffrey introduziu em [7] o conceito de “Hidden Dynamics” que surge da ideia de adicionar na combinação linear de Filippov um termo não linear satisfazendo algumas condições. Além disso, esta abordagem permite explorar novas possibilidades na dinâmica da variedade de descontinuidade, também possibilita uma melhor descrição para modelos em engenharia e biologia onde a descontinuidade é uma característica comum.

No Capítulo 3 serão usadas as ideias descritas em [7] para abordar o estudo dos SDSP. Entre outros resultados, demonstramos que os fluxos dos modos não lineares de deslize estão em correspondência, via conjugação, com os fluxos dos problemas de perturbação

singular restritos a algumas variedades invariantes (as quais existirão em virtude dos Teoremas de Fenichel [5]). Esta análise geométrica permite estudar de maneira mais profunda a teoria qualitativa dos SDSP.

No Capítulo 4, estudamos um modelo descontínuo em mecânica do tipo massa-mola-amortecedor sobre uma superfície não rugosa (Dry-Friction Oscillator). Por fim, concluímos o trabalho com uma análise usando a convenção de Filippov e os modos não lineares de deslizamento para modelar a força de atrito do problema, determinando assim qual destas abordagens é mais adequada para modelar fricção.

1 Preliminares

O objetivo deste capítulo é expor alguns dos principais conceitos e resultados da Teoria de Filippov. Iniciaremos introduzindo a convenção de Filippov para o estudo de sistemas dinâmicos suaves por partes, os conceitos de inclusão diferencial e fecho convexo, bem como o estudo da dinâmica elementar para regiões de costura e deslize sobre a variedade de descontinuidade e os tipos de singularidades.

1.1 Introdução aos sistemas de Filippov

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F^\pm : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe C^r ($r \geq 1$) e $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tendo 0 como valor regular. Vamos denotar a variedade $h^{-1}(0)$ por Σ , a qual é chamada variedade de descontinuidade, e $\Sigma^\pm = \{x \in U : h(x) \gtrless 0\}$. Também denotaremos $C^r(K, \mathbb{R}^n)$, $K = \bar{U}$, o conjunto de todos os campos vetoriais de classe C^r dotado com a topologia induzida pela norma $\|F\|_r = \text{Sup}\{\|D^i F(x)\| : x \in K, i \in \{0, 1, \dots, r\}\}$ e o conjunto $\Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n) = C^r(K, \mathbb{R}^n) \times C^r(K, \mathbb{R}^n)$ dotado com a topologia produto.

Nesta dissertação estudaremos a dinâmica de sistemas de equações diferenciais definidas por partes do seguinte tipo:

$$Z(x) = \begin{cases} F^+(x), & \text{se } h(x) > 0 \\ F^-(x), & \text{se } h(x) < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Observação 1.1.1. Vamos fazer as seguintes observações:

- Por sua definição, Σ tem uma dimensão menos do que o espaço ambiente. Além disso, se $p \in \Sigma$, então $T_p \Sigma = \ker dh_p = \ker \nabla h(p) = \{x \in U : \langle \nabla h(p), x \rangle = 0\}$.
- O sistema (1.1) pode ser escrito como $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$.
- Neste trabalho consideraremos apenas sistemas $Z \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$ como foram introduzidos acima. Mas, em geral podemos considerar sistemas com múltiplos campos $\dot{x} = F^i(x)$ onde $x \in \mathcal{R}_i$, sendo i tomado sobre um conjunto de índices identificados com as regiões \mathcal{R}_i e com múltiplas descontinuidades em diferentes regiões (veja [9]). Neste caso, a variedade de descontinuidade é compreendida como a união de m subvariedades que se intersectam transversalmente, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m$, com espaço de fase dados por $\Sigma \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \dots \cup \mathcal{R}_k$, onde $\Sigma_i = \{x \in \mathbb{R}^n : h_i(x) = 0\}$ e $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = h_1(x)h_2(x)h_3(x) \dots h_m(x) = 0\}$ em termos de funções escalares diferenciáveis h_i . O leitor interessado em se aprofundar no estudo desse tipo

de sistema pode consultar [14], no qual se desenvolve a teoria averaging de primeira e segunda ordem para estudar soluções periódicas de sistemas de equações diferenciais descontínuos por partes em dimensão arbitrária e com um número arbitrário de sistemas (partes).

Nosso objetivo inicial é estudar as trajetórias de $\dot{x} = Z(x)$. Localmente, se $p \in \Sigma^\pm$, a trajetória passando por p é dada pela trajetória do campo contínuo que é única, em virtude do Teorema de Existência e Unicidade (veja [16, pág. 4]). Porém, se $p \in \Sigma$ então Z é possivelmente descontínuo em p . Neste caso faz-se necessário uma nova definição do que seria uma solução passando por pontos em Σ . Observe que existem várias possibilidades para trajetórias que atingem a descontinuidade [ver Figura 1]. Por exemplo, as soluções podem tangenciar Σ , perdendo, eventualmente, a unicidade, elas podem cruzar a descontinuidade ou ainda, podem deslizar ao longo dela. Portanto, nossa definição deve ser suficientemente detalhada e geral a fim de abranger todas essas possibilidades.

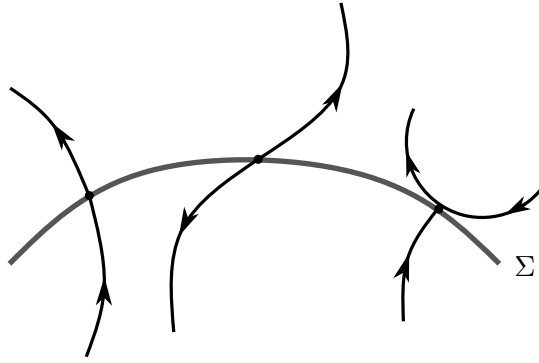


Figura 1 – Trajetórias locais passando por pontos de Σ .

As definições que daremos a seguir serão importantes mais adiante quando apresentarmos resultados para garantir a existência de soluções para sistemas suaves por partes (1.1). Elas podem ser encontradas em [1].

Definição 1.1.2. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, dizemos que $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função multivalorada se $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$, onde $\mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$ é partes de U .

Exemplo 1.1.3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^2$. Para $y \in \mathbb{R}^+$, a imagem inversa de y por f é $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$. Isto é, $f^{-1}(y) = \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}$. Então f^{-1} é uma função multivalorada. Em geral, a imagem inversa de uma função não bijetiva é um exemplo de função multivalorada.

Definição 1.1.4. Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Uma função multivalorada $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita Lipschitziana se existe $L > 0$ tal que $\mathcal{F}(x_1) \subset \mathcal{F}(x_2) + L |x_2 - x_1| \overline{B_1(0)}$, para cada $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.5. Uma função multivalorada $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *semi-contínua superiormente* (s.c.s) em x_0 se, para toda vizinhança aberta $B \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathcal{F}(x_0)$, existe uma

vizinhança aberta $A \subset U$ de x_0 tal que $\mathcal{F}(A) \subset B$. Se \mathcal{F} é s.c.s para cada $x \in U$, dizemos que \mathcal{F} é semi-contínua superiormente.

Exemplo 1.1.6. Consideremos $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} [1, 4], & \text{se } x = 0 \\ [2, 3], & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Então \mathcal{F} é semi-contínua superiormente em $x = 0$. De fato, seja $V \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $\mathcal{F}(0) \subset V$, isto implica que $[1, 4] \subset V$. Assim, para qualquer vizinhança U de 0, temos que se $x \in U$ então $\mathcal{F}(x) = [1, 4]$ ou $\mathcal{F}(x) = [2, 3]$. Portanto, $\mathcal{F}(x) \subset [1, 4] \subset V$, para todo $x \in U$ e concluímos que \mathcal{F} é s.c.s em $x = 0$.

Definição 1.1.7. Dizemos que uma função multivalorada $\mathcal{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *semi-contínua inferiormente* (s.c.i) em $x_0 \in U$, se para todo aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $B \cap \mathcal{F}(x_0) \neq \emptyset$, existe um aberto $A \subset U$ de x_0 tal que $B \cap \mathcal{F}(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in A$. Uma função multivalorada \mathcal{F} é dita s.c.i se ela for s.c.i para todo $x \in U$.

Definição 1.1.8. Sejam $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$ e $f : U \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x; \lambda) = \frac{1 + \lambda}{2} F^+(x) + \frac{1 - \lambda}{2} F^-(x). \quad (1.2)$$

Definimos o *fecho convexo* entre F^+ e F^- como sendo

$$[F^+, F^-] = \{f(x; \lambda) : \lambda \in [-1, 1]\}.$$

Observação 1.1.9. Como $f(x; \pm 1) = F^\pm(x)$ então podemos definir $\lambda = \text{sign}(h(x))$ se $h(x) \neq 0$ (fora de Σ) e $\lambda \in [-1, 1]$ se $h(x) = 0$ (nos pontos de Σ).

O fecho convexo nos permite considerar a seguinte função multivalorada

$$\mathcal{F}_Z(x) = \begin{cases} \{F^+(x)\}, & \text{se } h(x) > 0 \\ \{F^-(x)\}, & \text{se } h(x) < 0 \\ [F^+(x), F^-(x)], & \text{se } h(x) = 0 \end{cases}$$

A convenção de Filippov para o estudo de sistemas (1.1) em $h = 0$ está baseada principalmente na teoria das inclusões diferenciais.

Definição 1.1.10. Seja \mathcal{F} uma função multivalorada. Um sistema do tipo $\dot{x} \in \mathcal{F}(x)$ é chamado *inclusão diferencial*.

A partir da Definição 1.1.10, Filippov estabeleceu o conceito de trajetórias para sistemas $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r$ em seu livro [6]. Assim, na convenção de Filippov, dizemos que uma função $\varphi : [-T, T] \rightarrow U$ é solução de $\dot{x} = Z(x)$ se, e somente se, φ for solução de $\dot{x} \in \mathcal{F}_Z(x)$. Formalmente temos as seguintes definições.

Definição 1.1.11. Uma função $\varphi : [-T, T] \rightarrow U$ é dita *absolutamente contínua* se existe uma função integrável $g : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t g(s) ds$.

Observação 1.1.12. O espaço das funções absolutamente contínuas é denotado por $\mathbf{AC}([-T, T], \mathbb{R}^n)$. Aliás, se $\varphi \in \mathbf{AC}([0, T], \mathbb{R}^n)$ temos que $\varphi'(t) = g(t)$ em quase todo ponto $t \in [-T, T]$ (q.t.p), isto é, φ é diferenciável em q.t.p e $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t g(s) ds$.

Definição 1.1.13. Uma função $\varphi : [-T, T] \rightarrow U$ é solução da inclusão diferencial $\dot{x} \in \mathcal{F}_Z(x)$ se

- (i) φ é absolutamente contínua;
- (ii) $\varphi'(t) \in F(\varphi(t))$ qtp em $[-T, T]$.

Um sistema $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$ considerado com a convenção de Filippov, isto é, cujas soluções são definidas de acordo com a Definição 1.1.13, é conhecido na literatura como sistema de Filippov. Entretanto, em geral não podemos esperar unicidade de solução passando por um ponto $p \in U$. Com efeito, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1.14. Dado um sistema como em (1.1), sejam $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ as trajetórias ilustradas na Figura 2.

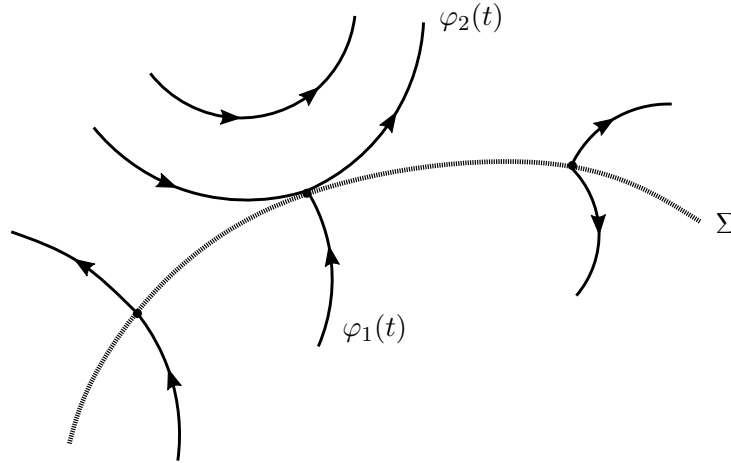


Figura 2 – Não unicidade das soluções.

Observamos que $\varphi_1'(t) = F^-(\varphi(t)) \in \mathcal{F}_Z(\varphi_1(t))$ e $\varphi_2'(t) = F^+(\varphi(t)) \in \mathcal{F}_Z(\varphi_2(t))$ são soluções da inclusão diferencial, além disso

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_1(t), & \text{se } -T \leq t \leq 0 \\ \varphi_2(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

também é solução. Portanto não temos unicidade de soluções locais para campos vetoriais suaves por partes.

Baseado no exemplo 1.1.14, dado $x_0 \in U$ denotamos $S_F(x_0) \subset \mathbf{AC}([-T, T], U)$ o conjunto de todas as soluções φ de $\dot{x} \in F(x)$ tais que $\varphi(0) = x_0$. Além disso, $S_F(x_0)(t) = \{\varphi(t) : \varphi \in S_F(x_0)\}$ é chamado de conjunto de alcance. O teorema 1.1.15 dá condições necessárias para a existência de soluções de $\dot{x} \in F(x)$ e portanto de (1.1).

Teorema 1.1.15. [6, pág. 77] *Seja $\mathcal{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, uma função multivalorada sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Assuma que (i) $\mathcal{F}(x) \subset \mathbb{R}^n$ é convexo para cada $x \in U$, e (ii) \mathcal{F} é semicontínua superiormente (resp. Lipschitziana). Então:*

- (a) $S_{\mathcal{F}}(x_0) \neq \emptyset$, para todo $x_0 \in U$.
- (b) $S_{\mathcal{F}}(x_0) \subset \mathbf{AC}([-T, T], U)$ e $S_{\mathcal{F}}(x_0)(t) \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos conexos (resp. conexos por caminhos).

Corolário 1.1.16. *Nas hipóteses do Teorema 1.1.15. Dado $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$ um sistema de Filippov, então $S_{\mathcal{F}_Z}(x_0) \neq \emptyset$, para todo $x_0 \in U$.*

Teorema 1.1.17. *Seja $\mathcal{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função multivalorada sobre um aberto U de \mathbb{R}^n . Assuma que*

- (i) $\mathcal{F}(x) \subset \mathbb{R}^n$ é convexo e compacto, para cada $x \in U$.
- (ii) \mathcal{F} é semicontínua superiormente (resp. Lipschitziana).

Então $x \mapsto S_{\mathcal{F}}(x_0)$, $x \mapsto S_{\mathcal{F}}(x_0)(t)$ são semicontínuas superiormente (resp. Lipschitziana). Mais ainda, dado $x_0 \in U$ e $\varphi_0 \in S_{\mathcal{F}}(x_0)$, existe $\Gamma : U \longrightarrow \mathbf{AC}([-T, T], U)$ função contínua tal que $\Gamma(x_0) = \varphi_0$ e $\Gamma(x) \in S_{\mathcal{F}}(x)$ para cada $x \in U$.

Agora introduzimos o conceito de derivada de Lie o qual nos dará uma interpretação geométrica importante no estudo qualitativo dos sistemas (1.1).

Definição 1.1.18. Dado um campo $Z = (F^+, F^-) \in \Omega_h^r(K, \mathbb{R}^n)$ e uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^l , definimos a *derivada de Lie* $Fh : \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$Fh(\xi) = \langle \nabla h(\xi), F(\xi) \rangle.$$

Isto é, Fh representa a derivada da função h na direção do vetor F . Podemos também definir $F^2 h(\xi) = F(Fh(\xi)) = \langle \nabla Fh(\xi), F(\xi) \rangle$ e, recursivamente, $F^n h(\xi) = \langle \nabla (Fh)^{n-1}(\xi), F(\xi) \rangle$.

1.2 Regiões de costura e deslize

O Teorema 1.1.15 nos diz que as soluções para sistemas de Filippov existem, porém como podemos construir essas soluções? E como elas podem ser ilustradas? Nesta seção

responderemos estas perguntas. A ideia consistirá em concatenar segmentos de soluções de $\dot{x} = Z(x)$ nas regiões Σ^\pm com soluções “deslizantes” sobre Σ , para assim formar curvas contínuas que preservem a direção conforme o tempo avança.

Definição 1.2.1. Uma *órbita* de um sistema suave por partes em um ponto x_0 é uma concatenação maximal de trajetórias passando por x_0 .

Observação 1.2.2. A condição maximal é interpretada como uma trajetória contínua $x(t)$ que existe sobre um intervalo de tempo $t \in I$ o qual é o maior intervalo possível. Isto é, se para qualquer outra solução $\psi(t)$ definida sobre um intervalo J , tal que $I \subset J$ e $\psi|_I = x$, então $I = J$.

Vamos introduzir a seguinte notação. Uma família de soluções de (1.1) com condição inicial x_0 determina um fluxo $\varphi_t(x_0)$ satisfazendo

$$x(t) = \varphi_t(x_0) : \frac{d}{dt}\varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0); \lambda), \quad \varphi_0(x_0) = x_0.$$

Os respectivos fluxos nas regiões Σ^+ e Σ^- são escritos como φ_t^+ e φ_t^- , onde $\frac{d}{dt}\varphi_t^\pm(x_0) = f(\varphi_t(x_0); \pm 1)$.

Definição 1.2.3. Um ponto p na variedade de descontinuidade Σ é dito de costura se satisfaz a relação $F^+h(p) \cdot F^-h(p) > 0$. O conjunto de todos esses pontos é denotado por $\Sigma^c := \{p \in \Sigma : F^+h(p) \cdot F^-h(p) > 0\}$ e é chamado *região de costura*.

Dado $p \in \Sigma^c$ então temos duas possibilidades: (a) $F^+h(p) > 0$ e $F^-h(p) > 0$ ou (b) $F^+h(p) < 0$ e $F^-h(p) < 0$.

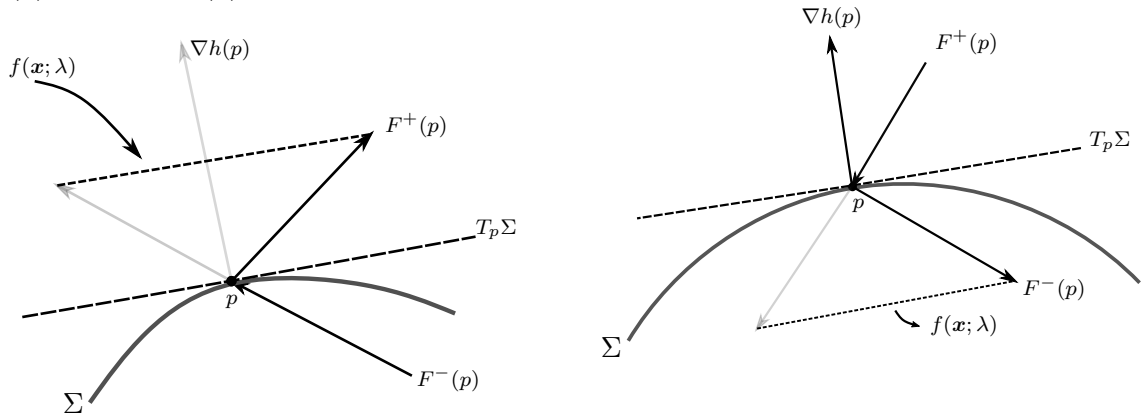


Figura 3 – Pontos de costura do tipo (a) na esquerda e do tipo (b) na direita.

Proposição 1.2.4. Se $p \in \Sigma^c$, então $\mathcal{F}_Z(p) \cap T_p\Sigma = \emptyset$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{F}_Z(p) \cap T_p\Sigma \neq \emptyset$, isto é, que existe $x \in \mathcal{F}_Z(p) \cap T_p\Sigma$. Então temos que existe $\lambda_0 \in (-1, 1)$ de tal forma que $x = f(p, \lambda_0) = \frac{1 + \lambda_0}{2}F^+(p) + \frac{1 - \lambda_0}{2}F^-(p)$.

Por outro lado, devemos ter

$$\langle \nabla h(p), f(p, \lambda_0) \rangle = \left\langle \nabla h(p), \frac{1 + \lambda_0}{2} F^+(p) + \frac{1 - \lambda_0}{2} F^-(p) \right\rangle = 0$$

assim, obtemos

$$\frac{1 + \lambda_0}{2} F^+ h(p) + \frac{1 - \lambda_0}{2} F^- h(p) = 0.$$

Portanto $F^+ h(p) = -\frac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0} F^- h(p)$, o qual implica que $F^+ h(p) \cdot F^- h(p) \leq 0$, isto é, $p \notin \Sigma^c$. \square

Agora queremos definir soluções passando por pontos de costura. Sejam $\phi^- : [-T, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\phi^+ : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluções de $\dot{x} = F^+(x)$ e $\dot{x} = F^-(x)$ com $x(0) = p \in \Sigma^c$. Para a possibilidade (a), consideramos

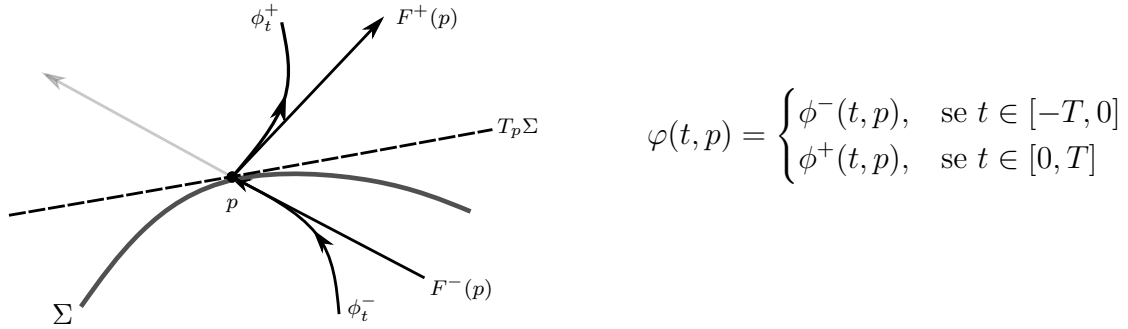


Figura 4 – Costura tipo (a): $\phi^+ \in \Sigma^+$ para $t > 0$ pequeno, $\phi^-(t, p) \in \Sigma^-$ para $t < 0$ pequeno.

As soluções para os pontos de costura (b) são definidas e ilustradas na Figura 5.

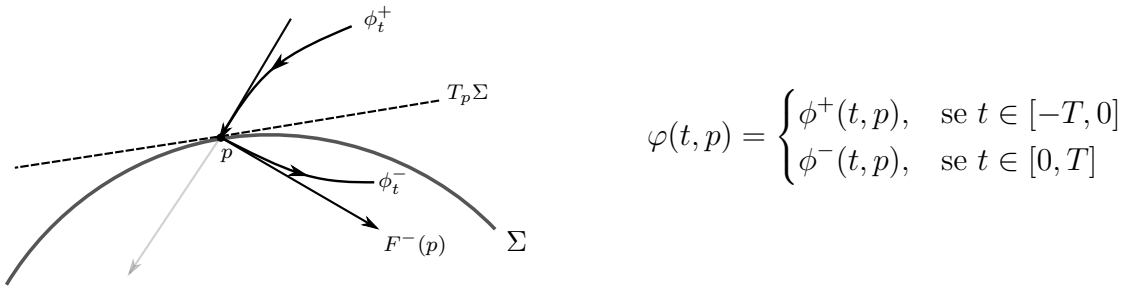


Figura 5 – Costura tipo (b) $\phi^+ \in \Sigma^+$ para $t < 0$ pequeno, $\phi^-(t, p) \in \Sigma^-$ para $t > 0$ pequeno.

Observação 1.2.5. Vemos que as trajetórias em Σ^+ e Σ^- se conectam de maneira natural através de pontos de costura, isto é, seguindo primeiro o fluxo dado por ϕ_t^- até passar por p e logo seguindo o fluxo ϕ_t^+ . Para o caso (b) a definição das soluções é a mesma invertendo o tempo.

Teorema 1.2.6. Para $p \in \Sigma^c$, $\varphi(t, p)$ é localmente a única solução de

$$\begin{cases} \dot{x} \in \mathcal{F}_Z(x) \\ x(0) = p. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiro vemos que $\varphi(t, p)$ é solução, pois $\dot{\varphi}(t) \in \{F^+(\varphi(t))\} = \mathcal{F}_Z(\varphi(t))$ para $t > 0$ e analogamente $\dot{\varphi}(t) \in \{F^-(\varphi(t))\} = \mathcal{F}_Z(\varphi(t))$ para $t < 0$. Por outro lado, se $\Phi : [-T, T] \rightarrow U$ for outra solução, então existe $0 < \varepsilon < T$ tal que $\Phi(t) \in \Sigma^c$ para todo $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, de onde $\dot{\Phi}(t) \in T_{\Phi(t)}\Sigma$, contradizendo a Proposição 1.2.4. \square

Definição 1.2.7. Um ponto $p \in \Sigma$ é dito de deslize se satisfaz a relação $F^+h(p) \cdot F^-h(p) < 0$. O conjunto de todos esses pontos é denotado por $\Sigma^s := \{p \in \Sigma : F^+h(p) \cdot F^-h(p) < 0\}$ e é chamado de *região de deslize*.

Proposição 1.2.8. Se $p \in \Sigma^s$, então $\mathcal{F}_Z(p) \cap T_p\Sigma^s$ consiste de um único vetor $Z^s(p)$.

Demonstração. Como $p \in \Sigma^s$, segue que $F^+h(p) \cdot F^-h(p) < 0$. Além disso, $\mathcal{F}_Z(x) = \{f(p, \lambda) : \lambda \in [-1, 1]\}$, onde $f(p, \lambda) = \frac{1+\lambda}{2}F^+h(p) + \frac{1-\lambda}{2}F^-h(p)$. Por outro lado, temos que $\langle \nabla h(p), f(p, \lambda) \rangle = 0$, mas isso acontece se, e somente se,

$$\frac{1+\lambda}{2}F^+h(p) + \frac{1-\lambda}{2}F^-h(p) = 0,$$

o que é equivalente a,

$$\lambda^s(p) = \frac{F^-h(p) + F^+h(p)}{F^-h(p) - F^+h(p)} = \frac{1 + F^+h(p)/F^-h(p)}{1 - F^+h(p)/F^-h(p)}.$$

Tomando $a = -\frac{F^+h(p)}{F^-h(p)}$, temos que $a > 0$, pois $p \in \Sigma^s$. Logo, $-1 - a < 1 - a < 1 + a$, o

que por sua vez implica que $\lambda^s(p) = \frac{1-a}{1+a} \in (-1, 1)$. Entretanto, $\lambda^s(p)$ é determinado de maneira única. Assim, tomando $Z^s(p) := f(p, \lambda^s(p))$, obtemos

$$Z^s(p) = \frac{F^-h(p)F^+(p) - F^+h(p)F^-(p)}{F^-h(p) - F^+h(p)} \in \mathcal{F}_Z(x) \cap T_p\Sigma.$$

Portanto, concluímos que $\mathcal{F}_Z(p) \cap T_p\Sigma = \{Z^s(p)\}$.

\square

Temos também duas possibilidades para pontos de deslize:

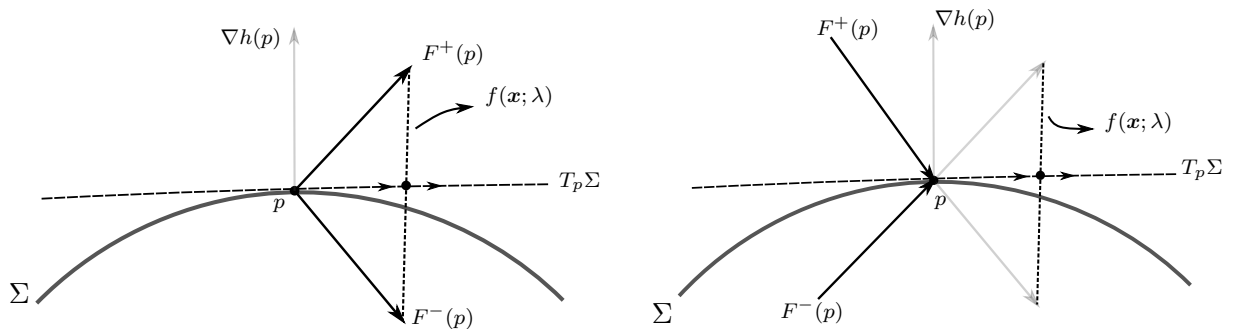


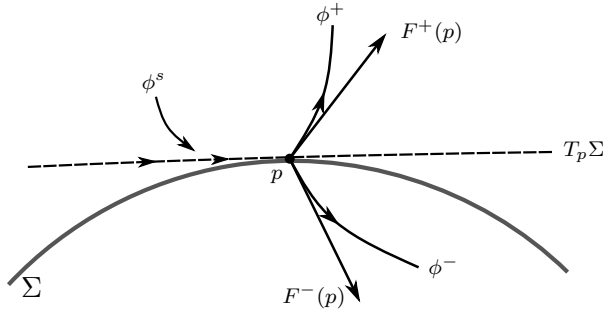
Figura 6 – Ponto de escape: $F^-h(p) < 0 < F^+h(p)$ na esquerda e ponto de deslize: $F^+h(p) < 0 < F^-h(p)$ na direita.

A Proposição 1.2.8 implica que

$$\begin{aligned} Z^s : \Sigma^s &\longrightarrow T\Sigma^s \\ p &\longmapsto Z^s(p) \end{aligned}$$

é um campo vetorial contínuo definido sobre a variedade Σ^s , o qual chamaremos de *Campo Deslizante*. Assim, a dinâmica de deslize é dada por $\dot{x} = Z^s(x) := f(x; \lambda^s(x))$ para $x \in \Sigma$, tal que $\langle \nabla h(x), f(x, \lambda^s(x)) \rangle = 0$ e $\lambda^s(p) \in (-1, 1)$ sobre $h(x) = 0$. Aliás, também decorre da Proposição 1.2.8 que para pontos $p \in \Sigma^s$ existe um único λ^s satisfazendo $\langle \nabla h(p), f(p, \lambda^s) \rangle = 0$. Em outras palavras, existe um único modo de deslize para o sistema.

Para construirmos soluções deslizantes, suponha que $p \in \Sigma^s$ e $\phi^s(t, p)$ seja solução de $\dot{x} = Z^s(x)$, $x(0) = p$, isto é, $\phi^s(t, p)$ é solução local de $\dot{x} \in \mathcal{F}_Z(x)$, $x(0) = p$. Consideremos no primeiro caso (Figura 7)

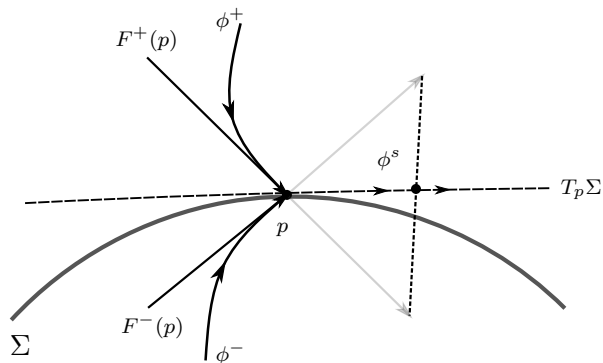


$$\begin{aligned} \varphi^+(t, p) &= \begin{cases} \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ \phi^+(t, p), & \text{se } t \in [0, T] \end{cases} \\ \varphi^-(t, p) &= \begin{cases} \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ \phi^-(t, p), & \text{se } t \in [0, T] \end{cases} \end{aligned}$$

Figura 7 – Soluções para pontos de escape.

Observação 1.2.9. Observamos que nos pontos de deslize podemos definir mais soluções locais do que nos pontos de costura, no caso anterior a função φ^+ é definida de tal maneira que iniciamos no ponto $\phi^s(-T, p) \in \Sigma^s$, logo seguimos o fluxo ϕ^s ao longo de Σ até passar por p e finalmente seguimos o fluxo de $\phi^+(t, p)$ para tempo t positivo. Por outro lado a função φ^- é definida da mesma maneira para tempo t negativo, porém depois de passar por p seguimos o fluxo dado por $\phi^-(t, p)$.

Analogamente, para os pontos de deslize consideramos (Figura 8)



$$\begin{aligned} \Psi^+(t, p) &= \begin{cases} \phi^+(t, p), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [0, T] \end{cases} \\ \Psi^-(t, p) &= \begin{cases} \phi^-(t, p), & \text{se } t \in [-T, 0] \\ \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [0, T] \end{cases} \end{aligned}$$

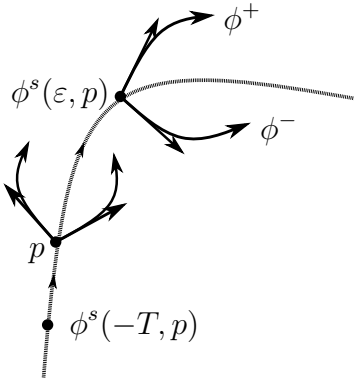
Figura 8 – Soluções para pontos de deslize.

Observamos que a definição das funções Ψ^+ e Ψ^- é a mesma das funções φ^+ e φ^- respectivamente, invertendo o tempo.

Observação 1.2.10. Os exemplos anteriores ilustram novamente que nem sempre temos unicidade das soluções. Além disso, vemos que o fluxo do campo deslizante é repulsor para pontos de escape e é atrator para pontos de deslize. Aqui atrator e repulsor significa que o fluxo fora da variedade de descontinuidade é atraído e repellido por Σ , respectivamente.

Teorema 1.2.11. Se $p \in \Sigma^s$, então $\varphi^\pm, \Psi^\pm \in S_{\mathcal{F}}(p)$.

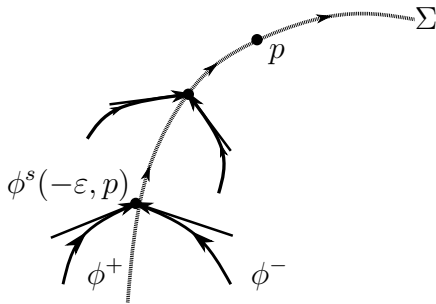
Vamos terminar esta seção construindo trajetórias locais deslizantes. Suponha que $p \in \Sigma^s$, segue da Definição 1.2.7 e pela continuidade das funções $Fh^\pm : U \rightarrow \mathbb{R}$, que existe um aberto V_p de p tal que $V_p \subset \Sigma^s$. Em outras palavras, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\phi^s(t, p) \in T_p \Sigma^s$ para todo $t \in [-T, \varepsilon]$ ou para $t \in [-\varepsilon, T]$.



$$\psi_\varepsilon^+(t, p) = \begin{cases} \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-T, \varepsilon] \\ \phi^+(t - \varepsilon, \phi^s(\varepsilon, p)), & \text{se } t \in [\varepsilon, T] \end{cases}$$

$$\psi_\varepsilon^-(t, p) = \begin{cases} \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-T, \varepsilon] \\ \phi^-(t - \varepsilon, \phi^s(\varepsilon, p)), & \text{se } t \in [\varepsilon, T] \end{cases}$$

Figura 9 – Trajetórias locais $\psi_\varepsilon^+, \psi_\varepsilon^-$ para pontos de escape.



$$\varphi_\varepsilon^+(t, p) = \begin{cases} \phi^+(t + \varepsilon, \phi^s(-\varepsilon, p)), & \text{se } t \in [-T, -\varepsilon] \\ \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-\varepsilon, T] \end{cases}$$

$$\varphi_\varepsilon^-(t, p) = \begin{cases} \phi^-(t + \varepsilon, \phi^s(-\varepsilon, p)), & \text{se } t \in [-T, -\varepsilon] \\ \phi^s(t, p), & \text{se } t \in [-\varepsilon, T] \end{cases}$$

Figura 10 – Trajetórias locais $\varphi_\varepsilon^+, \varphi_\varepsilon^-$ para pontos de deslize.

1.3 Singularidades

Nesta seção estudaremos e classificaremos dois tipos de singularidades na variedade de descontinuidade Σ .

Definição 1.3.1. Seja $Z \in \Omega(U)$ sistema de Filippov. Um ponto $p \in \Sigma^s$ é chamado de *pseudo-equilíbrio* de Z quando $Z^s(p) = f(p; \lambda^s(p)) = 0$.

Observação 1.3.2. Na combinação convexa, p é pseudo-equilíbrio se F^+ e F^- estão em direções opostas. De fato se para algum $c > 0$, $F^+(p) = -c \cdot F^-(p)$ então

$$Z^s(p) = \frac{F^-h(p) \cdot (-c F^-(p)) - (-c F^-h(p)) \cdot F^-(p)}{F^-h(p) + c F^-h(p)} = 0.$$

Segue da Definição 1.3.1 que se $p \in \Sigma^s$ é um ponto de pseudo-equilíbrio então $\phi^s(t, p) = p$ é solução do sistema de Filippov $Z(x)$, com $x(0) = p$, para todo $t \in I_p$ (intervalo máximo), ou seja, são pontos estacionários do fluxo de deslize sobre Σ . Assim podemos definir para $0 < \varepsilon < T$ as seguintes soluções do sistema

$$\Gamma^\pm(t, p) = \begin{cases} p, & \text{se } t \in [-T, \varepsilon] \\ \phi^\pm(t - \varepsilon, p), & \text{se } t \in [\varepsilon, T] \end{cases} \quad \text{e} \quad \Upsilon^\pm(t, p) = \begin{cases} \phi^\pm(t - \varepsilon, p), & \text{se } t \in [-T, \varepsilon] \\ p, & \text{se } t \in [\varepsilon, T] \end{cases}$$

Exemplo 1.3.3. Nas coordenadas (x_1, x_2) com $\lambda = \text{sign } x_1$, considere

$$\dot{x} = \frac{1+\lambda}{2}(-1, -x_2) + \frac{1-\lambda}{2}(1, b) = f(x; \lambda).$$

Como $h(x_1, x_2) = x_1$, segue $\nabla h(x_1, x_2) = (1, 0)$. O modo de deslize é achado resolvendo $\nabla h(p) \cdot f(x; \lambda) = 0$,

$$\lambda^s = \frac{1+\lambda}{2}(-1) + \frac{1-\lambda}{2}(1) = 0 \implies Z^s(x) = f(x; \lambda^s) = \left(0, \frac{(b-x_2)}{2}\right).$$

Logo temos um pseudo-equilíbrio em $x_2 = b$. Observe que para $\lambda = \pm 1$ o sistema $f((x_1, b); \lambda)$ não se anula em $x_1 \gtrless 0$.

Por outro lado, considerando

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{1}{2}(1+\lambda)(-1, x_3 - x_2, -x_2) + \frac{1}{2}(1-\lambda)(1, b, c)$$

com $\lambda = \text{sign } x_1$, obtemos $\lambda^s = 0$ e $Z^s(x) = f(x; \lambda^s) = \left(0, \frac{b-x_2+x_3}{2}, \frac{c-x_2}{2}\right)$, com um pseudo-equilíbrio em $(x_2, x_3) = (c, c-b)$.

Vemos que no primeiro sistema as direções dos campos vetoriais F^\pm no pseudo-equilíbrio são dadas por $(-1, -b)$ e $(1, b)$, e no sistema em três dimensões são dadas por $(-1, -b, -c)$ e $(1, b, c)$, como se ilustra na Figura 11.

Definição 1.3.4. Dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é de tangência se $F^+h(p) \cdot F^-h(p) = 0$. Denotaremos o conjunto de todos esses pontos por Σ^t .

Observe que se $F^+h(p) = 0$, $\langle \nabla h(p), f(p, \lambda) \rangle = 0$ implica $\lambda(p) = 1$ e $f(p; 1) = F^+(p)$. Analogamente, se $F^-h(p) = 0$ temos $f(p; -1) = F^-(p)$. Logo, nesses pontos as componentes normais se anulam, isto é, F^\pm permanecem tangentes a Σ . Essas possibilidades correspondem a $\lambda = \pm 1$. Existem diferentes tipos de tangências os quais classificamos a seguir.

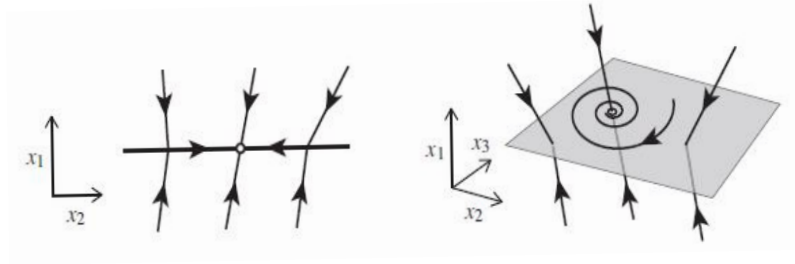


Figura 11 – Pontos de pseudo-equilíbrio em duas e três dimensões.

Definição 1.3.5. Dizemos que $p \in \Sigma^t$ é um ponto de *dobra* do campo F^+ (resp. F^-) quando $F^+h(p) = 0$ e $F^{+2}h(p) \neq 0$ (resp. $F^-h(p) = 0$ e $F^{-2}h(p) \neq 0$).

Se considerarmos a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) = h^\pm(\varphi(t, p))$, sendo $p \in \Sigma^t$, temos que $\gamma(0) = h(\varphi^\pm(0, p)) = h(p) = 0$. Além disso, podemos mostrar que $\gamma'(t) = F^\pm(h(\varphi^\pm(t, p)))$ e $\gamma''(t) = F^{\pm 2}(h(\varphi^\pm(t, p)))$, logo $\gamma'(0) = F^\pm h(p)$ e $\gamma''(0) = F^{\pm 2}h(p)$. Desta forma, concluímos:

- Se $F^{+2}h(p) > 0$ então $t = 0$ é mínimo local de γ e p é chamado dobra visível.
- Se $F^{+2}h(p) < 0$ então $t = 0$ é máximo local de γ e p é chamado dobra invisível.
- Se $F^{-2}h(p) > 0$ então p é chamado dobra invisível.
- Se $F^{-2}h(p) < 0$ então p é chamado dobra visível.



Figura 12 – Dobras visível (esquerda) e invisível (direita) para F^+ dos sistemas (1.3) e (1.4) respectivamente. Sobre Σ a linha completa representa a região de desliz enquanto que a linha com traços indica a região de costura.

Exemplo 1.3.6. Considere os seguintes sistemas

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1+\lambda}{2}(-1, -x_1) + \frac{1-\lambda}{2}(0, 1), \quad \lambda = \text{sign } x_2 \quad (1.3)$$

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1+\lambda}{2}(1, -x_1) + \frac{1-\lambda}{2}(0, 1), \quad \lambda = \text{sign } x_2. \quad (1.4)$$

Para (1.3) vemos que $F^-h(x_1, x_2) = 1 \neq 0$ para todo $(x_1, 0) \in \Sigma$ e $F^+h(x_1, x_2) = -x_1 = \dot{x}_2$ logo temos uma tangência em $x_1 = 0$ i.e. em $(0, 0)$, além disso como $F^{+2}h(\mathbf{x}) = 1$ então $(0, 0)$ é uma dobra visível. Por outro lado em (1.4) temos também uma tangência em $x_1 = 0$ e $F^{+2}h(\mathbf{x}) = -1$, o que implica que é uma dobra invisível (ver Figura 12).

Definição 1.3.7. Dizemos que $p \in \Sigma^t$ é um ponto de cúspide do campo F^+ (resp. F^-) quando $F^+h(p) = F^{+2}h(p) = 0$ e $F^{+3}h(p) \neq 0$ (resp. $F^-h(p) = F^{-2}h(p) = 0$ e $F^{-3}h(p) \neq 0$).

Exemplo 1.3.8.

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = \frac{\lambda + 1}{2} (1, 0, x_1^2 + x_2) + \frac{1 - \lambda}{2} (0, 0, 1), \quad \lambda = \text{sign } x_3. \quad (1.5)$$

O ponto $(0, 0, 0)$ é uma cúspide do campo F^+ . Além disso, temos que $\dot{x}_3 = x_1^2 + x_2$ se anula em $x_3 = 0$ ao longo da curva $x_1 = \pm\sqrt{-x_2}$ (sendo $x_2 < 0$) e como $\ddot{x}_2 = \pm 2\sqrt{-x_2}$, significa que $x_1 = \sqrt{-x_2}$ é uma família de dobras visíveis enquanto a curva $x_1 = -\sqrt{-x_2}$ é uma família de dobras invisíveis para F^+ .

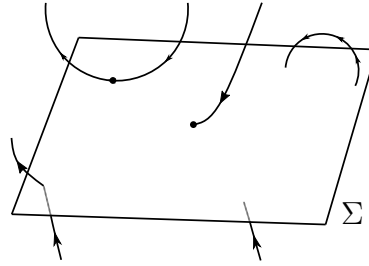


Figura 13 – Ponto de cúspide e dobras do campo F^+ em (1.5).

Em geral, dizemos que $p \in \Sigma^t$ é contato de ordem n do campo F^\pm quando $F^\pm h(p) = F^{\pm 2}h(p) = \dots = F^{\pm(n-1)}h(p) = 0$ e $F^{\pm n}h(p) \neq 0$.

Definição 1.3.9. Seja $Z = (F^+, F^-) \in \Omega(U)$ sistema de Filippov. Um ponto $p \in U$ é chamado de *singularidade* se:

- (a) $p \in \Sigma^+$ e $F^+(p) = 0$ ou $p \in \Sigma^-$ e $F^-(p) = 0$.
- (b) $p \in \Sigma^s$ e $Z^s(p) = 0$.
- (c) $p \in \Sigma^t$.

Definição 1.3.10. Seja $Z = (F^+, F^-) \in \Omega(U)$ sistema de Filippov. Dizemos que $p \in \Sigma$ é um ponto regular se

- $F^+h(p) \cdot F^-h(p) > 0$ (costura), ou
- $p \in \Sigma^s$ e p não é um ponto singular do campo deslizante $Z^s(\mathbf{x})$.

Observação 1.3.11. Em outras palavras, na Definição 1.3.10 excluimos as tangências e pseudo-equilíbrios. Portanto, p é um ponto regular de um sistema Z de Filippov se $p \in \Sigma^\pm$ ou se p é ponto regular de Σ .

Sabemos que um ponto p é singularidade de um campo contínuo F se, e somente se, $F(p) = 0$, isto é, F admite solução estacionária $\varphi(t, p) = p$ para todo t real. Porém, a partir da Definição 1.3.9 vemos que isso nem sempre ocorre nos sistemas descontínuos. Assim, para (a) temos que $S_{\mathcal{F}_Z(p)} = \{\varphi(t) = p\}$, isto é, temos solução estacionária, também para (b) pois $p = \phi^s(t, p) \in S_{\mathcal{F}_Z(p)}$. Porém em (c) nem sempre existe solução estacionária. As condições suficientes e necessárias para que isso aconteça são apresentadas nos próximos resultados.

Teorema 1.3.12. *Seja p ponto singular do sistema $Z \in \Omega^r(U)$ de Filippov. Então p admite uma trajetória estacionária se, e somente se, $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$.*

Demonstração. Se p admite solução estacionária, isto é, $\{t \mapsto p\} \in S_{\mathcal{F}_Z(p)}$, implica que $\varphi^\pm(t, p) = p$ ou $\phi^s(t, p) = p$ para todo $t \in I_p$, ou seja, ou $F^+(p) = 0$, ou $F^-(p) = 0$ ou $Z^s(p) = 0$. Logo, em qualquer caso $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$.

Reciprocamente, se $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$, então $F^+(p) = 0$ ou $F^-(p) = 0$ ou $Z^s(p) = 0$ e portanto p admite solução estacionária. \square

Teorema 1.3.13. *Seja $Z \in \Omega^r(U)$. Assuma que para $p \in \Sigma$ temos que $\{t \mapsto p\} \in \mathcal{F}_Z(p)$. Então p é uma singularidade de Z .*

Demonstração. Para $p \in \Sigma$ suponha que $\{t \mapsto p\} \in S_{\mathcal{F}_Z(p)}$, pelo Teorema 1.3.12, temos que $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$, isto é, existe $\lambda^* \in [-1, 1]$ tal que $f(p; \lambda^*) = 0$ pois $\mathcal{F}_Z(p) = \{[F^+(p), F^-(p)]\}$. Então $\langle \nabla h(p), f(p, \lambda^*) \rangle = 0$, de onde

$$\frac{1+\lambda}{2} F^+h(p) + \frac{1-\lambda}{2} F^-h(p) = 0, \quad \text{implica,} \quad \frac{1+\lambda}{2} F^+h(p) = \frac{\lambda-1}{2} F^-h(p).$$

Assim, temos as possibilidades:

- $F^+h(p) = 0$, logo $F^-h(p) = 0$ ou $\lambda^* = 1$ e nos dois casos $p \in \Sigma^t$.
- $F^+h(p) \cdot F^-h(p) \neq 0$, então $F^+h(p) \cdot F^-h(p) < 0$ e $p \in \Sigma^s$. Segue que

$$\lambda^s(p) = \frac{F^-h(p) + F^+h(p)}{F^-h(p) - F^+h(p)} \quad \text{e} \quad Z^s(p) = \frac{F^-h(p) F^+(p) - F^+h(p) F^-(p)}{F^-h(p) - F^+h(p)} = 0.$$

Portanto p é um pseudo-equilíbrio. \square

Teorema 1.3.14. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado e $Z(F^+, F^-) \in \Omega^r(U)$ sistema de Filippov, $r \geq 1$. Então $p \in \Sigma$ admite uma trajetória estacionária se, e somente se, uma das três possibilidades é válida:*

(i) $F^+(p) = 0$ ou $F^-(p) = 0$.

(ii) $F^+h(p) = F^-h(p) = 0$, $F^+(p) = \alpha F^-(p)$ e $\langle F^+(p), F^-(p) \rangle < 0$.

(iii) p é um ponto de pseudo-equilíbrio.

Demonstração. Como $p \in \Sigma$ e $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$, então $f(p; \lambda^*) = \frac{1+\lambda}{2}F^+(p) + \frac{1-\lambda}{2}F^-(p) = 0$ para algum $\lambda^* \in [-1, 1]$. Temos as possibilidades:

(i) Se $\lambda^* = -1$ então $(1 - \lambda^*)/2 \neq 0$ e $F^-(p) = f(p; -1) = 0$, analogamente se $\lambda^* = 1$ então $F^+(p) = 0$.

(ii) Se $\lambda^* \neq \pm 1$, como $\langle \nabla h(p), f(p; \lambda^*) \rangle = 0$, suponha $F^+h(p) \cdot F^-h(p) = 0$. Além disso, $F^+(p) = \alpha F^-(p)$ sendo $(\lambda^* - 1)/(1 + \lambda)$ e $\langle F^+(p), F^-(p) \rangle < 0$ pois $\alpha < 0$.

(iii) Se $\lambda^* \neq \pm 1$ e $F^+h(p) \neq 0$, $F^-h(p) \neq 0$, então $F^+h(p) \cdot F^-h(p) < 0$ pois $F^+h(p) = \alpha F^-h(p)$, segue que $p \in \Sigma^s$ e $Z^s(p) = f(p; \lambda^s(p)) = 0$ para algum $\lambda^s(p) \in (-1, 1)$. Portanto p é um ponto de pseudo-equilíbrio.

Reciprocamente, suponha que (i) é satisfeita, isto é, $F^+(p) = 0$ ou $F^-(p) = 0$. Em qualquer dos dois casos basta tomarmos $\lambda^* = \pm 1$ para obtermos que $f(p; \pm 1) = 0 \in \{[F^+(p), F^-(p)]\} \in \mathcal{F}_Z(p)$ e pelo Teorema 1.3.12, p tem trajetória estacionária.

Suponha (ii), $F^+h(p) = F^-h(p) = 0$, $F^+(p) = \alpha F^-(p)$ e que $\langle F^+(p), F^-(p) \rangle < 0$. Observe que necessariamente $\alpha < 0$, desse modo

$$\frac{F^-(p)}{2} (\alpha(1 + \lambda) + (1 - \lambda)), \quad \text{implica,} \quad \lambda = -\frac{1 + \alpha}{\alpha - 1}.$$

Agora observando que $\alpha - 1 < -\alpha - 1 < -\alpha + 1$, mostramos $|\lambda| < 1$, logo para esse λ , $f(p; \lambda) = 0 \in \mathcal{F}_Z(p)$. Portanto, p admite solução estacionária.

Finalmente, se p é um pseudo-equilíbrio, temos que $0 = Z^s(p) = T_p\Sigma \cap \mathcal{F}_Z(p)$, então $0 \in \mathcal{F}_Z(p)$ e a conclusão segue do Teorema 1.3.12. \square

2 Teoria Geométrica de Perturbação Singular

Neste capítulo introduziremos a Teoria Geométrica de Perturbação Singular. Iniciaremos apresentando os problemas de perturbação singular e discutindo o significado dos Teoremas de Fenichel, os quais são ferramentas fundamentais para sua análise. Ao final, definiremos o método de regularização e estudaremos os problemas de perturbação singular particulares provenientes da regularização de um sistema de Filippov. A exposição do Capítulo 2 é feita seguindo as referências [3], [11] e [18].

2.1 Teoremas de Fenichel

Considere $\epsilon_0 > 0$ e seja $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Nosso foco principal são as equações da seguinte forma

$$\epsilon \dot{x} = f(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = g(x, y, \epsilon), \quad (2.1)$$

sendo $(x, y, \epsilon) \in U \times V \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, as derivadas são tomadas com respeito a t e f, g são funções de classe C^r , $r \geq 1$. Reescalando a variável do tempo $\tau = \epsilon t$, obtemos o sistema

$$\dot{x} = f(x, y, \epsilon), \quad \dot{y} = \epsilon g(x, y, \epsilon). \quad (2.2)$$

Definição 2.1.1. Dizemos que (2.1) e (2.2) são os *sistemas lento* e *rápido*, respectivamente.

Os sistemas (2.1) e (2.2) são equivalentes para $\epsilon \neq 0$ e, em [5] e [11], são chamados de problemas de perturbação singular. Porém, no limite $\epsilon \rightarrow 0$ o sistema rápido se reduz ao sistema

$$\dot{x} = f(x, y, 0), \quad \dot{y} = 0. \quad (2.3)$$

Por outro lado, no limite $\epsilon \rightarrow 0$ o sistema lento se reduz ao sistema diferencial algébrico

$$0 = f(x, y, 0), \quad \dot{y} = g(x, y, 0), \quad (2.4)$$

isto é, uma equação diferencial de dimensão n definida na variedade $f(x, y, 0) = 0$.

Definição 2.1.2. Os sistemas (2.3) e (2.4) são chamados de *problema layer* e *problema reduzido*, respectivamente.

A teoria geométrica de perturbação singular tem como principal objetivo identificar e estudar conjuntos e variedades invariantes presentes no espaço de fase de (2.1), uma maneira de fazer isso consiste em combinar resultados sobre a dinâmica dos problemas

limite singulares (2.3) e (2.4) a fim de obter informação da dinâmica de (2.1) (ou (2.2)) para pequenos valores de ϵ . Nesta ordem de ideias, denotaremos por $S = \{(x, y) \in U \times V : f(x, y, 0) = 0\}$ o conjunto de zeros da função f , chamada variedade crítica ou lenta, dependendo se ela é estudada a partir de (2.3) ou (2.4), como observamos a seguir.

Observação 2.1.3. Desde o ponto de vista do Problema Layer, S é o conjunto de pontos críticos (equilíbrio) de (2.3). Reciprocamente, para cada $(x, y) \in S$ tal que posto $D_x f(x, y, 0) = m$, então pelo Teorema da Função Implícita podemos parametrizar S resolvendo $f(x, y, 0) = 0$ localmente por $x = \psi(y)$. Estas condições sobre S evoluem com tempo de escala lento de acordo com o Problema Reduzido (2.4), para $x = \psi(y)$, $\dot{y} = g(\psi(y), y, 0)$, logo (2.4) define uma dinâmica sobre S , o qual contrasta com o fato de S ser uma variedade de pontos críticos quando ela é vista desde (2.3).

Definição 2.1.4. Um subconjunto $S_0 \subset S$ é *Normalmente Hiperbólico* se a matriz $D_x f(p, 0)$ não possui autovalores com parte real nula, para cada $p \in S_0$.

Observação 2.1.5. Se S_0 é normalmente hiperbólico (N.H.) então para $(x^*, y^*) \in S_0$, temos que x^* é uma singularidade hiperbólica de $\dot{x} = f(x, y^*, 0)$. Em nosso problema de estudo S_0 é N.H. relativa a (2.3).

Teorema 2.1.6 (Primeiro Teorema de Fenichel). *Considere um sistema como em (2.1). Seja $S_0 \subseteq S$ uma subvariedade compacta e normalmente hiperbólica (possivelmente com bordo). Então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe uma variedade localmente invariante S_ϵ com respeito ao fluxo de (2.1). A variedade S_ϵ tem a distância de Hausdorff $\mathcal{O}(\epsilon)$ (quando $\epsilon \rightarrow 0$) de S_0 e é difeomorfa a S_0 . Além disso, S_ϵ é C^r -diferenciável para algum $r < \infty$ e o fluxo sobre S_ϵ converge ao fluxo lento quando $\epsilon \rightarrow 0$.*

Observação 2.1.7. Do Primeiro Teorema de Fenichel podemos observar:

- A variedade S_ϵ do Teorema 2.1.6 é N.H. e também é conhecida como variedade de Fenichel.
- O Teorema 2.1.6 garante que para uma variedade normalmente hiperbólica e compacta $S_0 \subset S$ o fluxo do sistema (2.1) restrito a S_ϵ é uma pequena perturbação do fluxo de (2.4) restrito a S_0 . Esta afirmação pode ser melhor ilustrada se S_0 é escrita como gráfico de uma função (veja [11, pág. 50]).
- A distância de Hausdorff entre dois conjuntos não vazios $V, W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é definida por

$$d_H(V, W) = \max \left\{ \sup_{v \in V} \inf_{w \in W} d(v, w), \sup_{w \in W} \inf_{v \in V} d(v, w) \right\}.$$

O fato que S_ϵ tem a distância de Hausdorff de S_0 quer dizer que existe uma constante $k > 0$ tal que $d_H(S_\epsilon, S_0) \leq k\epsilon$ (quando $\epsilon \rightarrow 0$), em outras palavras $S_\epsilon \rightarrow S_0$ quando $\epsilon \rightarrow 0$ seguindo a distância de Hausdorff.

- No Teorema 2.1.6 a única relação ao fluxo de (2.1) é mediante a afirmação que a variedade perturbada é localmente invariante. A invariância local da variedade S_ϵ significa que ela pode ter fronteiras nas quais algumas trajetórias poderiam sair de S_ϵ (veja [11, pág. 49]). Isso não pode ser evitado, pois a maioria das aplicações nos apresenta variedades com bordo.

Se $S_0 \subset S$ é normalmente hiperbólico, então sabemos que cada $x_0 \in S_0$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do Problema Layer, logo x_0 possui variedades locais estável e instável $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ respectivamente, cujas dimensões são iguais ao número de autovalores de $D_x f(x_0, 0)$ com parte real negativa e positiva, respectivamente. Nesta ordem de ideias, definimos as variedades estável e instável locais de S_0

$$W^s(S_0) = \{x_0 \in S_0 : F_t(x_0) \rightarrow S_0, t \rightarrow \infty\} = \bigcup_{x_0 \in S_0} W^s(x_0),$$

$$W^u(S_0) = \{x_0 \in S_0 : F_t(x_0) \rightarrow S_0, t \rightarrow -\infty\} = \bigcup_{x_0 \in S_0} W^u(x_0),$$

onde F_t denota o fluxo de (2.3). O segundo Teorema de Fenichel garante que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, as variedades $W^s(S_0)$ e $W^u(S_0)$ persistem sob o fluxo de (2.2).

Teorema 2.1.8 (Segundo Teorema de Fenichel). *Nas hipóteses do Teorema 2.1.6, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem variedades localmente estável $W^s(S_\epsilon)$ e instável $W^u(S_\epsilon)$ difeomorfas a $W^s(S_0)$ e $W^u(S_0)$, respectivamente. Além disso, elas são C^r diferenciáveis para algum $r < \infty$ e localmente invariantes sob o fluxo do sistema (2.2).*

O Teorema 2.1.8 implica que S_ϵ e S_0 tem as mesmas propriedades de estabilidade vistas desde (2.2) e (2.3) respectivamente, neste sentido a dinâmica dos sistemas se mantém.

Observação 2.1.9. Existe um Terceiro Teorema de Fenichel (veja [3, pág. 6]) que se refere à persistência individual das variedades estável e $W^s(x_0)$ e instável $W^u(x_0)$ sob perturbações singulares, com $x_0 \in S_0$. Ou seja, podemos garantir que existem $W^s(x_\epsilon) \subset W^s(S_\epsilon)$ e $W^u(x_\epsilon) \subset W^u(S_\epsilon)$ difeomorfas a $W^s(x_0)$ e $W^u(x_0)$ (resp.), para todo $x_\epsilon \in S_\epsilon$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

2.2 Regularização de sistemas de Filippov

Definição 2.2.1. Uma função $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $r \geq 0$, é chamada de *transição* se $\phi(s) = -1$ para $s \leq -1$, $\phi(s) = 1$ para $s \geq 1$ e $\phi'(s) > 0$ para cada $s \in (-1, 1)$.

No que segue denotaremos $\phi_\delta(h) = \phi(h/\delta)$, com $\delta > 0$. O método de *regularização* para sistemas de Filippov

$$Z(x) = f(x; \lambda) = \frac{1+\lambda}{2}F^+(x) + \frac{1-\lambda}{2}F^-(x),$$

consiste em substituir λ por uma função de transição ϕ , obtendo assim o sistema

$$Z_\delta(x) := f(x; \phi_\delta(h(x))) = \frac{F^+(x) + F^-(x)}{2} + \phi_\delta(h(x)) \left(\frac{F^+(x) - F^-(x)}{2} \right),$$

o qual chamaremos de ϕ -regularização ou C^r -regularização de $Z \in \Omega^r(U)$, esse conceito foi introduzido pela primeira vez em [17]. Em outras palavras, uma regularização de um sistema de Filippov é uma família uniparamétrica $Z_\delta \in C^r(U)$, $r \geq 0$, tal que $f(x; \phi_\delta(h(x)))$ converge ao sistema descontínuo quando $\delta \rightarrow 0$ (veja por exemplo, Figura 14).

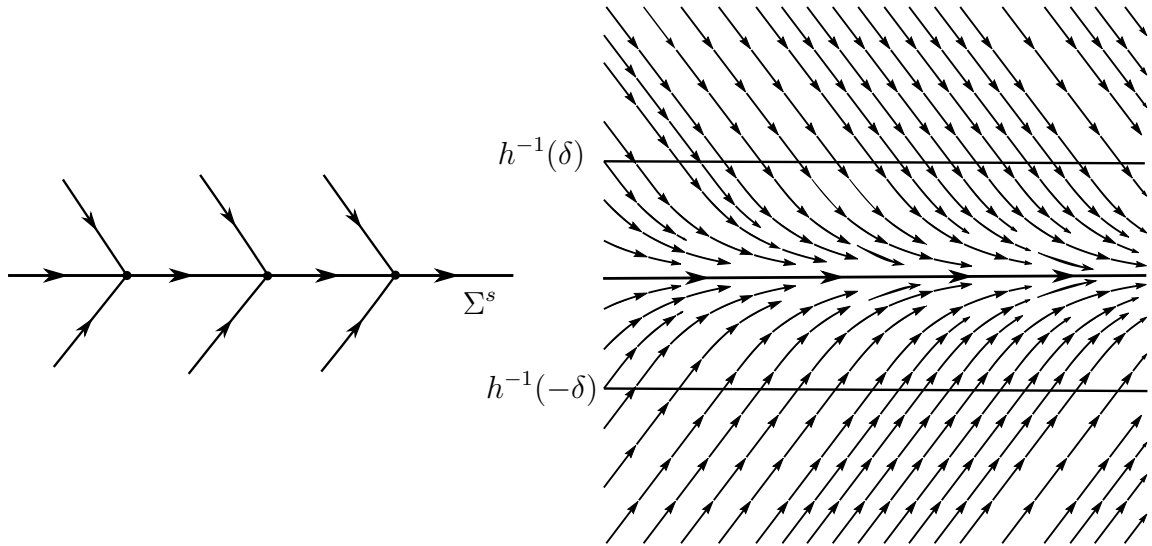


Figura 14 – Campo deslizando (esquerda) e sua regularização (direita).

Agora vamos relacionar os problemas de perturbação singular com a regularização de sistemas de Filippov $Z(x, y) = (F_1^\pm(x, y), F_2^\pm(x, y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, supondo $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $h(x, y) = y$. Observemos que o campo deslizando neste caso é dado por

$$Z^s(x, 0) = \frac{F_2^-(x, 0) F_1^+(x, 0) + F_2^+(x, 0) F_1^-(x, 0)}{F_2^-(x, 0) - F_2^+(x, 0)},$$

$$\lambda^s(x, 0) = \frac{F_2^-(x, 0) + F_2^+(x, 0)}{F_2^-(x, 0) - F_2^+(x, 0)}.$$

Regularizando nosso sistema resulta

$$\dot{x} = \frac{F_1^+(x, 0) + F_1^-(x, 0)}{2} + \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \cdot \frac{F_1^+(x, 0) - F_1^-(x, 0)}{2},$$

$$\dot{y} = \frac{F_2^+(x, 0) + F_2^-(x, 0)}{2} + \phi\left(\frac{y}{\delta}\right) \cdot \frac{F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)}{2}.$$

Aliás, fazendo $w = y/\delta$ então $y = \delta w$, $\dot{y} = \delta \dot{w}$ e obtemos o sistema lento

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{F_1^+(x, \delta w) + F_1^-(x, \delta w)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_1^+(x, \delta w) - F_1^-(x, \delta w)}{2}, \\ \delta \dot{w} &= \frac{F_2^+(x, \delta w) + F_2^-(x, \delta w)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_2^+(x, \delta w) - F_2^-(x, \delta w)}{2}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Assim, reescalando o tempo $t = \delta \tau$ obtemos o sistema rápido

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \delta \left(\frac{F_1^+(x, \delta w) + F_1^-(x, \delta w)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_1^+(x, \delta w) - F_1^-(x, \delta w)}{2} \right), \\ \dot{w} &= \frac{F_2^+(x, \delta w) + F_2^-(x, \delta w)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_2^+(x, \delta w) - F_2^-(x, \delta w)}{2}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Observamos então que a regularização do sistema de Filippov determina um problema de perturbação singular (2.5)-(2.6). Logo, tomando $\delta \rightarrow 0$ em (2.5)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{F_1^+(x, 0) + F_1^-(x, 0)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_1^+(x, 0) - F_1^-(x, 0)}{2}, \\ \phi(w) &= \frac{F_2^-(x, 0) + F_2^+(x, 0)}{F_2^-(x, 0) - F_2^+(x, 0)} = \lambda^s(x, 0).\end{aligned}\quad (2.7)$$

chegamos ao Problema Reduzido (2.7) e tomando $\delta \rightarrow 0$ em (2.6)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{w} &= \frac{F_2^+(x, 0) + F_2^-(x, 0)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)}{2}\end{aligned}\quad (2.8)$$

chegamos ao Problema Layer (2.8) do sistema de Filippov. Observe que $\lambda^s(x, 0) \in (-1, 1)$, se, e somente se, $(x, 0) \in \Sigma^s$, segue que $w = \phi^{-1} \circ \lambda^s(x, 0) \in (-1, 1)$. Então definimos $S_0 = \{(x, w) : w = \phi^{-1} \circ \lambda^s(x, 0)\}$, por outro lado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{F_1^+(x, 0) + F_1^-(x, 0)}{2} + \frac{F_2^-(x, 0) + F_2^+(x, 0)}{F_2^-(x, 0) - F_2^+(x, 0)} \cdot \frac{F_1^+(x, 0) - F_1^-(x, 0)}{2} \\ &= \frac{F_2^-(x, 0) F_1^+(x, 0) - F_2^+(x, 0) F_1^-(x, 0)}{F_2^-(x, 0) - F_2^+(x, 0)} \\ &= \pi_1(Z^s(x, 0)).\end{aligned}$$

Portanto, o campo deslizante é escrito como $Z^s(x, 0) = (\pi_1(Z^s(x, 0)), 0)$ e assim podemos afirmar:

1. S_0 e Σ^s são C^r -difeomorfos, tal difeomorfismo de classe C^r é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : \Sigma^s &\longrightarrow S_0 \\ (x, 0) &\longmapsto (x, \phi^{-1} \circ \lambda^s(x, 0)).\end{aligned}$$

2. O problema reduzido (2.7) restrito a S_0 e o campo deslizando são conjugados.

Demonstração. Seja $\gamma_t(x)$ solução do sistema $\dot{x} = \pi_1(Z^s(x, 0))$ com $x(0) = x$, isto implica que $\varphi^s(t, x, 0) = (\gamma_t(x), 0)$ é trajetória do campo $Z^s(x, 0)$.

Agora vamos nos concentrar no problema reduzido. Se $(x, y) \in S_0$ segue que $y = \phi^{-1} \circ \lambda^s(x, 0)$, logo podemos escrever $(x, y) = \mathcal{H}(x, 0)$. Por outro lado, como $\gamma_t(x)$ é solução de $\dot{x} = \pi_1(Z^s(x, 0))$ então a função

$$\varphi(t, x_0, \phi^{-1} \circ \lambda^s(x_0)) = (\gamma_t(x_0), \phi^{-1} \circ \lambda^s(\gamma_t(x_0)))$$

é solução do problema reduzido $\dot{x} = \pi_1(Z^s(x, 0))$, $w = \phi^{-1} \circ \lambda^s(x, 0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(t, \mathcal{H}(x_0, 0)) &= \varphi(t, x_0, \phi^{-1} \circ \lambda^s(x_0)) \\ &= (\gamma_t(x_0), \phi^{-1} \circ \lambda^s(\gamma_t(x_0))) \\ &= \mathcal{H}(\gamma_t(x_0), 0). \end{aligned}$$

Portanto a dinâmica de (2.7) sob S_0 é C^r -conjugada à dinâmica de Σ^s via \mathcal{H} . \square

Observação 2.2.2. A existência da conjugação é independente da função de transição ϕ . Por outra parte, considerando

$$G_2(x, w, 0) = \frac{F_2^+(x, 0) + F_2^-(x, 0)}{2} + \phi(w) \cdot \frac{F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)}{2} \in \mathbb{R}$$

escrevemos (2.8) por $x = 0, \dot{w} = G_2(x, w, 0)$. Então como para todo $(x, w) \in S_0$ temos

$$\frac{\partial G_2}{\partial w}(x, w, 0) = \frac{\phi'(w)}{2} (F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)) \neq 0$$

concluimos que S_0 é normalmente hiperbólica para cada $(x, w) \in S_0$. Mais ainda, se $\phi'(\pm 1) \neq 0$, S_0 pode ser estendida ao seu bordo mantendo a hiperbolicidade.

Baseado na observação anterior, podemos garantir em virtude do Teorema 2.1.6 a existência de uma variedade S_ϵ (para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno) localmente invariante sob o fluxo de (2.5), difeomorfa a S_0 e tal que os fluxos de (2.5) sobre S_ϵ são uma ϵ -perturbação do sistema (2.7) sobre S_0 . Mais ainda, pelo Teorema 2.1.8 o mesmo acontece para os fluxos de (2.6) com relação ao fluxo de (2.8) sobre S_0 . Por este motivo, como S_0 é difeomorfa a Σ^s , concluimos que conjuntos localmente invariantes e estruturalmente estáveis em Σ^s se mantêm em S_ϵ .

Utilizando os resultados prévios, podemos obtemos uma alternativa para definir e visualizar as soluções de sistemas de Filippov. De fato, se consideramos a função de

transição ϕ em (2.5) como sendo a identidade, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{F_1^+(x, \delta w) + F_1^-(x, \delta w)}{2} + w \cdot \frac{F_1^+(x, \delta w) - F_1^-(x, \delta w)}{2} \\ \delta \dot{w} &= \frac{F_2^+(x, \delta w) + F_2^-(x, \delta w)}{2} + w \cdot \frac{F_2^+(x, \delta w) - F_2^-(x, \delta w)}{2}.\end{aligned}$$

Porém, os sistemas de nosso interesse são

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{F_1^+(x, 0) + F_1^-(x, 0)}{2} + w \cdot \frac{F_1^+(x, 0) - F_1^-(x, 0)}{2} \\ 0 &= \frac{F_2^+(x, 0) + F_2^-(x, 0)}{2} + w \cdot \frac{F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)}{2}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

e também,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \dot{w} &= \frac{F_2^+(x, 0) + F_2^-(x, 0)}{2} + w \cdot \frac{F_2^+(x, 0) - F_2^-(x, 0)}{2}.\end{aligned}\tag{2.10}$$

A existência de uma variedade crítica e localmente invariante para (2.9) e da conjugação entre o campo deslizante e o sistema (2.9) restrito a tal variedade, segue-se dos resultados anteriores. Portanto os problemas limite singulares (2.9)-(2.10) nos fornecem uma alternativa para definir as soluções de um sistema de Filippov.

Exemplo 2.2.3. Consideremos o sistema no plano $(\dot{x}, \dot{y}) = (2\lambda^2 - 1, 2\lambda^2 - \lambda - x)$ tal que $\lambda = \text{sign}(y)$. Resolvendo $\langle f(x, y; \lambda), \nabla h(x, y) \rangle = 0$ obtemos $\lambda^s = 2 - x$. A condição $\lambda^s \in (-1, 1)$ implica que $x > 1$ e $x < 3$. Então achamos $\Sigma^s = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$ e $\Sigma^c = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ e } x > 3\}$. Assim temos um único modo de deslize $f(x, y; \lambda^s)$ atrator sobre Σ^s .

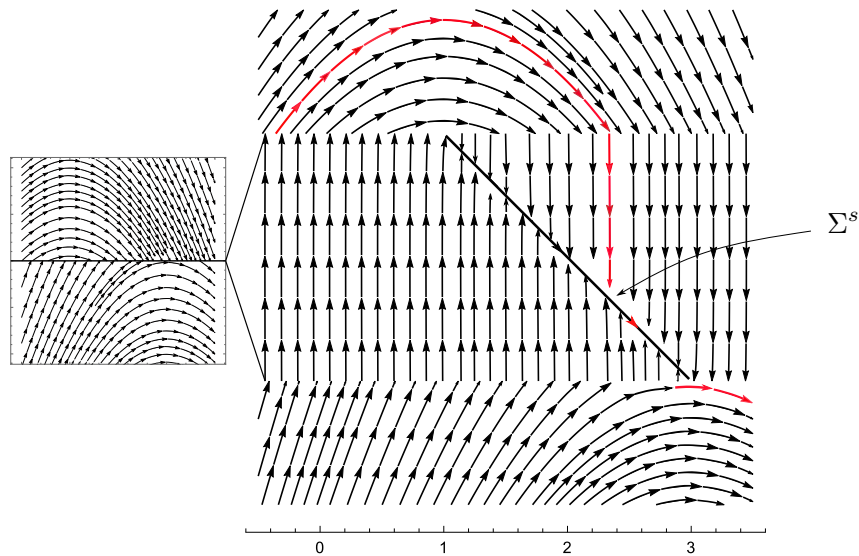


Figura 15 – Problemas limite singular para um sistema de Filippov.

A Figura 15 mostra que em $x = 1$ e $x = 3$ temos duas dobras invisível e visível, respectivamente. Também ilustra uma solução do sistema (vermelho) mediante os problemas limite singulares associados, onde a transição entre o problema reduzido e layer na solução corresponde a um instante de tempo nulo. Finalmente observamos que o sistema não tem pseudo-equilíbrios pois $f(x, y; \lambda^s) = (1, 0)$.

3 Modos não lineares de deslize

No Capítulo 1 apresentamos a convenção introduzida por Filippov para estudar a dinâmica na variedade de descontinuidade de um sistema suave por partes. Recentemente, o estudo qualitativo de modelos aplicados clássicos, suscitou a dúvida de se o fecho convexo é suficientemente geral para descrever o comportamento das soluções na descontinuidade.

Este capítulo é baseado principalmente nos trabalhos [7] e [15]. Aqui abordaremos o estudo dos sistemas dinâmicos descontínuos mediante ao que chamaremos de modos não lineares de deslize, esses modos de deslize estendem as convenções de Filippov. Descreveremos as possibilidades que existem nas regiões de descontinuidade, assim como suas singularidades e demonstraremos que a dinâmica do sistema descontínuo obtida a partir deste abordagem “persiste” quando o sistema é regularizado.

3.1 Introdução

Dado um sistema suave por partes (1.1) a teoria de Filippov nos dá uma boa técnica para estudar (1.1) em $h = 0$ mediante uma combinação linear (1.2). Além disso, vimos que (1.2) é consistente se nós garantimos que $\lambda = \text{sign}(h(\mathbf{x}))$ para $h(\mathbf{x}) \neq 0$. Porém, resulta natural nos perguntar, por que não considerar combinações mais gerais que também nos permitam descrever soluções em Σ consistentemente?

Assim se consideramos uma dependência não linear no parâmetro de transição λ , obtemos que qualquer sistema da forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= g(\mathbf{x}; \lambda) = \frac{1 + \lambda}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{1 - \lambda}{2} F^-(\mathbf{x}) + \gamma(\lambda) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda) \\ &= f(\mathbf{x}; \lambda) + \gamma(\lambda) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda),\end{aligned}\tag{3.1}$$

é consistente com (1.1) sempre que Γ seja um campo vetorial (pelo menos contínuo), $\gamma(\lambda)$ seja uma função não linear em λ que é igual a zero em quase toda parte exceto em $h = 0$. Isto é, definindo

$$\lambda \in \begin{cases} \text{sign}(h(\mathbf{x})) & \text{se } h(\mathbf{x}) \neq 0 \\ [-1, 1] & \text{se } h(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad \gamma(\lambda) \in \begin{cases} 0 & \text{se } |\lambda| = 1 \\ [0, 1] & \text{se } |\lambda| < 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Observação 3.1.1. A condição $\gamma(\lambda) = 0$ se $|\lambda| = 1$ é justificada pelo fato que para $|\lambda| = 1$, $h(\mathbf{x}) \neq 0$ e $f(\mathbf{x}; \pm 1) = \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \pm 1) + \gamma(\pm 1) \Gamma(\mathbf{x}; \pm 1)$ implica $\gamma(\lambda) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda) = 0$ em $h(\mathbf{x}) \neq 0$. Algumas vezes denotaremos o campo vetorial $G(\mathbf{x}; \lambda) = \gamma(\lambda) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda)$.

Então vemos também que (3.1) define uma classe de sistemas descontínuos e multi-valorados, onde cada um deles é determinado pelas diferentes escolhas de $\Gamma(\mathbf{x}; \lambda)$, λ e γ

satisfazendo (3.2). Exemplos da maneira em que diferentes escolhas do campo Γ podem afetar sistemas físicos são estudadas em [10].

Exemplo 3.1.2. A função $\gamma(\lambda) = 1 - \lambda^2$ é não linear em λ e cumpre as condições em (3.2), logo $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \lambda) + (1 - \lambda^2) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda)$ nos permite estender (1.1) em $h = 0$. Por simplicidade, na maioria dos exemplos e modelos que consideraremos assumimos γ sendo dessa forma.

Exemplo 3.1.3. Nas coordenadas (x_1, x_2) considere um sistema por partes como (1.1), sendo $F^+ = (2, 1)$, $F^- = (-1, 2)$, $G(x_1, x_2; \lambda) = (\lambda^2 - 1)(0, -1)$ e com $h(x_1, x_2) = x_1$, ver Figura 16.

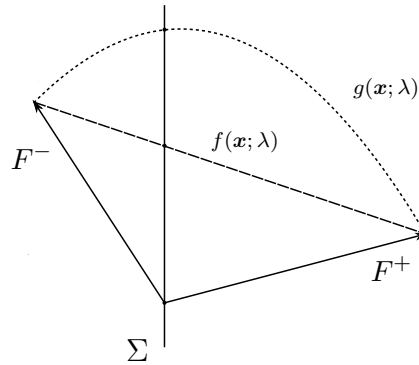


Figura 16 – Fecho convexo $f(\mathbf{x}; \lambda)$ (linha tracejada) e combinação não linear $g(\mathbf{x}; \lambda)$ (curva pontilhada) do sistema.

O estudo dos sistemas suaves por partes (1.1) mediante (3.1) foi chamado em [7] e [15] por “Hidden Dynamics”, no sentido que, como veremos nas próximas seções, existem comportamentos na dinâmica da variedade de descontinuidade que não são considerados tomando apenas o fecho convexo (1.2) e que inicialmente não podem ser “visualizadas” analisando somente os campos em Σ^\pm , portanto estão escondidos em Σ .

3.2 Costura e modos não lineares de deslize

Uma vez considerada uma combinação não linear (3.1), resulta natural pensar que a forma na qual esse sistema está relacionado com (1.1) é dada igualmente pela inclusão diferencial, isto é, uma função φ é solução de (1.1) se for solução da inclusão $\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}(\mathbf{x})$, sendo agora

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \{F^+(\mathbf{x})\}, & \text{se } h(\mathbf{x}) > 0 \\ \{F^-(\mathbf{x})\}, & \text{se } h(\mathbf{x}) < 0 \\ \{g(\mathbf{x}; \lambda)\}, & \text{se } h(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

onde $g(\mathbf{x}; \lambda)$ está sujeito a (3.2). Porém, a inclusão neste caso fornece resultados não consistentes, por exemplo $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ não é convexo em geral. Portanto, devemos achar uma alternativa para definir o que é uma solução de (1.1) mediante (3.1). Isso será feito na seção

3.4, uma vez apresentados resultados que relacionem a dinâmica dos modos não lineares de deslize (introduzida por esse tipo de combinações) com a dinâmica dos problemas de perturbação singular associados.

Dado $p \in \Sigma$, definimos a função escalar

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \Sigma \times [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p; \lambda) &\longmapsto \langle g(p; \lambda), \nabla h(p) \rangle. \end{aligned}$$

Denotaremos $S(p) = \{\lambda^* \in [-1, 1] : \mathcal{K}(p; \lambda^*) = 0\}$. Observe que para $p \in \Sigma$ podem existir ou não soluções de $\lambda^* \in [-1, 1]$ para $\mathcal{K}(p; \lambda^*) = 0$. Com base nisso, damos as seguintes definições.

Definição 3.2.1. O conjunto de todos os pontos $p \in \Sigma$ tais que $S(p) \neq \emptyset$ é chamado *região não linear de deslize* e será denotada por $\Sigma^{ns} = \{p \in \Sigma : S(p) \neq \emptyset\}$.

Definição 3.2.2. A *região de costura não linear* Σ^{nc} é definida como sendo o complemento de Σ^{ns} sobre Σ , isto é, $\Sigma^{nc} = \{p \in \Sigma : S(p) = \emptyset\}$.

Observação 3.2.3. Nas topologias usuais de \mathbb{R} e $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, observamos que $\mathcal{K} : \Sigma \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, logo $\mathcal{K}^{-1}(\{0\}) \subset \Sigma \times [-1, 1]$ é um subconjunto fechado de $\Sigma \times [-1, 1]$ e a projeção $\pi_1 : \Sigma \times [-1, 1] \longrightarrow \Sigma$ é uma aplicação fechada. Portanto $\Sigma^{ns} = \pi_1(\mathcal{K}^{-1}(\{0\}))$ é um subconjunto fechado de Σ e Σ^{nc} é um subconjunto aberto de Σ , com $\Sigma = \Sigma^{ns} \cup \Sigma^{nc}$.

Proposição 3.2.4. $\Sigma^s \subset \Sigma^{ns}$ e $\Sigma^{nc} \subset \Sigma^c$.

Demonstração. Se $p \in \Sigma^s$, então pela Proposição 1.2.8 existe um único $\lambda^s \in (-1, 1)$ solução de $\mathcal{K}(p; \lambda) = 0$, daí segue que $p \in \Sigma^{ns}$ e $\Sigma^s \subset \Sigma^{ns}$. Por outro lado, também $\Sigma^t \subset \Sigma^{ns}$, logo concluímos que $\Sigma^{nc} \subset \Sigma^c$. \square

Segue da Definição 3.2.1 que se $p \in \Sigma^{ns}$, então existe ao menos um $\lambda^* \in [-1, 1]$ solução de $\mathcal{K}(p; \lambda^*) = 0$. Se $\lambda^* \neq 1$ podemos definir um fluxo $\varphi_t(p)$ que, para certo intervalo de tempo, se desliza ao longo de $T_p \Sigma$, portanto $g(\mathbf{x}; \lambda^*)$ determina assim um modo de deslize. No Capítulo 1 vimos que para combinações lineares esse modo é único. Porém, dependendo da escolha do campo $\gamma(\lambda) \Gamma(\mathbf{x}; \lambda)$ é possível encontrar mais de uma solução λ^* para $\mathcal{K}(x; \lambda^*) = 0$, com $x \in \Sigma^{ns}$.

Em geral, podem existir $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_r^*$, com $r \in \mathbb{N}$, tais que para cada $i = 1, 2, \dots, r$, temos que λ_i^* determina um ramo de solução σ_i de Σ^{ns} e $\lambda_i : \sigma_i \subset \Sigma^{ns} \longrightarrow [-1, 1]$ associa a cada $\mathbf{x} \in \sigma_i$ uma solução $\lambda_i^*(\mathbf{x})$. Observe que por definição, podemos ter pontos p pertencendo a mais de um ramo σ_i , logo os conjuntos σ_i podem ou não ser disjuntos

dois a dois, mas $\Sigma^{ns} = \sigma_1 \cup \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_r$. Segue do anterior que se $p \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \dots \cap \sigma_m$ ($m \leq r$), então podemos considerar m equações dadas por

$$\dot{p} = g(p; \lambda_1^*(p)), \dot{p} = g(p; \lambda_2^*(p)), \dot{p} = g(p; \lambda_3^*(p)), \dots, \dot{p} = g(p; \lambda_m^*(p))$$

chamados *modos não lineares de deslize*. Ver Figura 17.

Suponha que para um sistema (3.1) no plano $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ com $h(\mathbf{x}) = x_2$, existam σ_1, σ_2 e $\sigma_3 \subset \Sigma^{ns}$ tais que $\Sigma^{ns} = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3$.

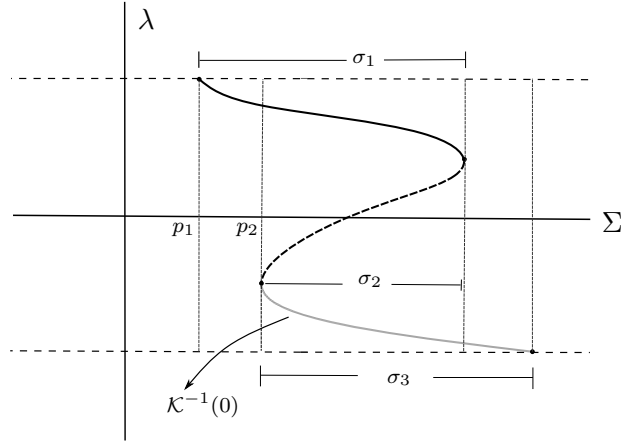


Figura 17 – Ramos σ_1 , σ_2 e σ_3 do exemplo e curva $\mathcal{K}^{-1}(0)$ composta pelos graficos das funções λ_1^* , λ_2^* e λ_3^* .

Como se ilustra na Figura 17, vemos que existem pontos p em σ_1 para os quais existe um único $\lambda_1^*(p)$ solução de $\mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) = 0$, portanto para esses pontos existe um único modo de deslize $g(p; \lambda^*(p))$ e as possíveis soluções locais foram definidas no Capítulo 1. O interessante acontece para pontos $p \in \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap \sigma_3$, neste caso temos três modos não lineares de deslize, cada um dos quais pode ter um comportamento diferente em sua dinâmica, isto nos abre um caminho para descrever soluções passando por p possivelmente diferentes para cada modo de deslize $g(p; \lambda_i^*(p))$ para $i = 1, 2, 3$.

Observação 3.2.5. Na Figura 17 consideramos um “ampliação” de Σ^{ns} (incompleta, pois não desenhamos os fluxos fora de Σ^{ns}) para ilustrar uma forma na qual podemos visualizar a dinâmica em Σ^{ns} introduzida por todos os modos não lineares de deslize, nas seções 3.3 e 3.4, justificamos porque é possível fazer essa identificação geométrica para Σ^{ns} . Neste sentido diz-se que a dinâmica está “escondida” em Σ e daí temos o nome Hidden Dynamics.

Para um sistema descontínuo (1.1) consideremos a combinação linear $f(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x}))$ e uma combinação não linear $g(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x}))$ para os pontos ilustrados na Figura 18. Assim podemos fazer as seguintes observações:

- Para o ponto p_1 temos um único modo linear de deslize $f^s(p_1; \lambda)$ se consideramos o fecho convexo e três modos não lineares de deslize $g^i(p_1; \lambda_i^*(p_1))$, $i = 1, 2, 3$ se consideramos a combinação não linear ilustrada na Figura 18.

- Para o ponto p_2 temos que $p_2 \in \Sigma^c$, mas $p_2 \in \Sigma^{ns}$, isto implica que $\Sigma^c \subsetneq \Sigma^{nc}$. Aliás também podem existir pontos que sejam de costura em um sistema de Filippov mas que venham a ser tangências considerando alguma combinação não linear.
- Se $p \in \Sigma^t$, então $F^+h(p) \cdot F^-h(p) = 0$. Se $F^+h(p) = 0$ (resp. $F^-h(p) = 0$) temos que $\lambda^* = 1$ (resp. $\lambda^* = -1$) é solução para $\mathcal{K}(p; \lambda^*) = 0$ e satisfaz a Definição 3.2.1, logo $\Sigma^t \subset \Sigma^{ns}$. Esse caso é ilustrado para p_3 onde $F^+(p_3) = g^{ns}(p_3; \lambda^*)$.

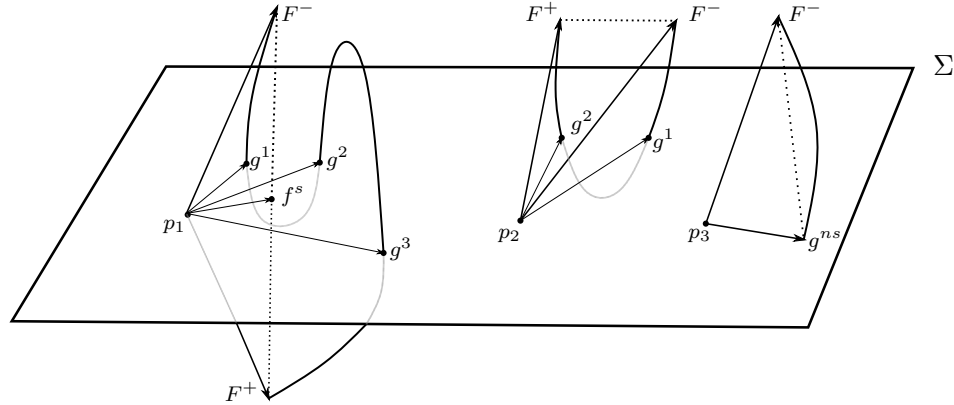


Figura 18 – Modos lineares e não lineares de deslize. Para cada ponto na figura, $f(\mathbf{x}; \lambda^s(\mathbf{x}))$ é ilustrada pela linha pontilhada e $g(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x}))$ pela curva, os modos de deslize são denotados por $g^i(p_j)$, $j = 1, 2$.

3.3 Regularização dos modos não lineares de deslize

Na seção 2.2 introduzimos o método de regularização para sistemas (1.2) mediante funções de transição $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r , $r \geq 0$ e monótonas, isto é, $\phi'(s) > 0$, para todo $s \in (-1, 1)$. Porém, podemos nos perguntar o que acontece se regularizamos (1.2) com uma função de transição não monótona, em sistemas físicos por exemplo, não existem argumentos para excluir essa possibilidade.

A seguir mostraremos como esses dois tipos de regularizações estão relacionados, concretamente mostraremos que uma regularização não monótona ψ de (1.2)

$$\dot{\mathbf{x}} = f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1 + \psi_\varepsilon(h(\mathbf{x}))}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{1 - \psi_\varepsilon(h(\mathbf{x}))}{2} F^-(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

é equivalente a uma regularização monótona ϕ de uma combinação não linear (3.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = g_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1 + \phi_\varepsilon(h(\mathbf{x}))}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{1 - \phi_\varepsilon(h(\mathbf{x}))}{2} F^-(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}; \phi_\varepsilon(h(\mathbf{x}))) \quad (3.4)$$

Teorema 3.3.1. *Se ϕ é uma função de transição e ψ é uma função de transição não monótona, então existe uma única função $G(\mathbf{x}; \lambda) = \gamma(\lambda)\Gamma(\mathbf{x}; \lambda)$ tal que a ψ -regularização de (1.2) determina uma ϕ -regularização de (3.1).*

Demonstração. A ψ -regularização (3.3) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{1 + \psi(s)}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{1 - \psi(s)}{2} F^-(\mathbf{x}) + \frac{F^+(\mathbf{x}) + F^-(\mathbf{x})}{2} \phi(s) - \frac{F^+(\mathbf{x}) + F^-(\mathbf{x})}{2} \phi(s) \\ &= \frac{1 + \phi(s)}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{1 - \phi(s)}{2} F^-(\mathbf{x}) + \frac{\psi(s) - \phi(s)}{2} F^+(\mathbf{x}) + \frac{\phi(s) - \psi(s)}{2} F^-(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}; \phi(s)) + (\psi(s) - \phi(s)) \cdot \frac{F^+(\mathbf{x}) + F^-(\mathbf{x})}{2}.\end{aligned}$$

Seja $\lambda = \phi(s)$, como ϕ é uma função monótona, então tem inversa sobre $(-1, 1)$, assim $s = \phi^{-1}(\lambda)$. Considerando

$$G(\mathbf{x}; \lambda) = (\psi(\phi^{-1}(\lambda)) - \lambda) \cdot \frac{F^+(\mathbf{x}) - F^-(\mathbf{x})}{2}$$

segue que G é única por construção. Logo, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}; \lambda) + G(\mathbf{x}; \lambda)$ e tomando $\lambda = \phi_\epsilon(h(\mathbf{x}))$ obtemos uma ϕ -regularização de (3.1) com $\lambda \in [-1, 1]$. Finalmente observamos que se $|s| \geq 1$ implica que $\lambda = \phi(s) = \text{sign}(s) = \psi(s)$ de onde $G(\mathbf{x}; \pm 1) = 0$. Portanto, G de fato satisfaz a condição (3.2). □

Corolário 3.3.2. *Se ϕ é uma função monótona de transição, então existe uma função não monótona ψ tal que a ϕ -regularização de (3.1) é uma ψ -regularização de (1.2) se, e somente se, $G(\mathbf{x}; \lambda) = \gamma(\lambda) (F^+(\mathbf{x}) - F^-(\mathbf{x})) / 2$ com $\gamma(\pm 1) = 0$.*

Observação 3.3.3. Uma consequência dos resultados anteriores é que o conjunto das ϕ -regularizações de (3.1) está contido no conjunto das ψ -regularizações de (1.2).

Os próximos resultados irão nos ajudar a entender como a presença de múltiplos modos não lineares de deslize afetam a dinâmica de um sistema descontínuo (1.1).

Teorema 3.3.4. *Seja σ uma região de Σ^{ns} que pode-se expressar como um gráfico de $x_1 = 0$ nas coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, sobre a qual existe uma função $\lambda^* : \sigma \rightarrow [-1, 1]$ tal que $\mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) = 0$ para todo $p \in \sigma$. Então:*

- (a) *Para cada função de transição ϕ de classe C^r , $r \geq 1$, a ϕ -regularização de (3.1) determina um problema de perturbação singular do tipo (2.1)-(2.2) nas variáveis (u, x_2, \dots, x_n) com $u = x_1/\epsilon$.*
- (b) *Existe uma variedade lenta $s \subset S_0$, difeomorfa a σ tal que $g^*|_\sigma$ é C^r -conjugado ao sistema reduzido restrito a s , onde g^* denota o campo tal que $p \mapsto g(p; \lambda^*(p))$.*

Demonstração. (a) Nas coordenadas de $\sigma \subset \{p \in \Sigma : p = (0, x_2, \dots, x_n)\}$ temos que $h(\mathbf{x}) = x_1$. Assim, escrevendo o campo $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ segue

$$\mathcal{K}(p; \lambda) = \frac{1 + \lambda}{2} F_1^+(p) + \frac{1 - \lambda}{2} F_1^-(p) + G_1(p; \lambda).$$

Por hipótese, para cada $p \in \sigma$ os modos não lineares de deslize satisfazem

$$0 = g_1^*(p; \lambda^*(p)) = \mathcal{K}(p; \lambda^*) \quad (3.5)$$

$$\dot{p}_i = g_i^*(p; \lambda^*(p)) = \frac{1 + \lambda^*}{2} F_i^+(p) + \frac{1 - \lambda^*(p)}{2} F_i^-(p) + G_i(p; \lambda)$$

para $i = 2, 3, \dots, n$. Agora, a ϕ -regularização de (3.1) tem a seguinte forma

$$\dot{p}_i = \frac{1 + \phi_\epsilon(x_1)}{2} F_i^+(p) + \frac{1 - \phi_\epsilon(x_1)}{2} F_i^-(p) + G_i(p; \phi_\epsilon(x_1)),$$

para $\epsilon > 0$ pequeno. Fazendo a mudança de coordenadas $u = x_1/\epsilon$ e $v = (x_2, \dots, x_n)$, obtemos o sistema lento

$$\epsilon \dot{u} = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_1^+(u\epsilon; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_1^-(u\epsilon; v) + G_1(u\epsilon, v; \phi(u)) \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_i = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_i^+(u\epsilon; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_i^-(u\epsilon; v) + G_i(u\epsilon, v; \phi(u)).$$

Se reescalamos o tempo obtemos o sistema rápido

$$\dot{u} = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_1^+(u\epsilon; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_1^-(u\epsilon; v) + G_1(u\epsilon, v; \phi(u)) \quad (3.7)$$

$$\dot{p}_i = \epsilon \left[\frac{1 + \phi(u)}{2} F_i^+(u\epsilon; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_i^-(u\epsilon; v) + G_i(u\epsilon, v; \phi(u)) \right].$$

(b) Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.6) e (3.7) chegamos aos problemas reduzido e layer respectivamente

$$0 = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_1^+(0; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_1^-(0; v) + G_1(0, v; \phi(u)) \quad (3.8)$$

$$\dot{p}_i = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_i^+(0; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_i^-(0; v) + G_i(0, v; \phi(u))$$

e

$$\dot{u} = \frac{1 + \phi(u)}{2} F_1^+(0; v) + \frac{1 - \phi(u)}{2} F_1^-(0; v) + G_1(0, v; \phi(u)) \quad (3.9)$$

$$\dot{p}_i = 0.$$

Como por hipótese para cada $p \in \sigma$, existe $\lambda^*(p)$ tal que $\mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) = 0$, então existe uma variedade lenta S_0 de (3.8) determinada por $\phi(u) = \lambda^*(p) \in [-1, 1]$. Mas dado que ϕ é inversível, temos que $s = \{(\phi^{-1} \circ \lambda^*(p), v) : p \in \sigma\} \subset S_0$ a qual é também uma variedade de pontos críticos de (3.9). Então, considerando

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \sigma &\longrightarrow s \\ (0, v) &\longmapsto (\phi^{-1} \circ \lambda^*(0, v), v) \end{aligned}$$

temos que \mathcal{H} é uma aplicação bijetiva e de classe C^r , logo \mathcal{H} é um difeomorfismo entre σ e s . Agora mostraremos como as trajetórias de (3.5) estão relacionadas com (3.8). Substituindo $\phi(u) = \lambda^*(p)$ em (3.8), o problema reduzido sobre s é escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1 + \lambda^*(p)}{2} F_1^+(0; v) + \frac{1 - \lambda^*(p)}{2} F_1^-(0; v) + G_1(0, v; \lambda^*(p)) \\ \dot{p}_i &= \frac{1 + \lambda^*(p)}{2} F_i^+(0; v) + \frac{1 - \lambda^*(p)}{2} F_i^-(0; v) + G_i(0, v; \lambda^*(p)). \end{aligned}$$

Suponha que $\varphi_t(\bar{p}) = (0, x_t(\bar{p}))$ seja solução de (3.5) com $\varphi_0(\bar{p}) = \bar{p} \in \sigma$, onde $\bar{p} = (0, \bar{v})$. Então segue $\Upsilon_t(\phi^{-1} \circ \lambda^*(\bar{p}), \bar{v}) = (\phi^{-1} \circ \lambda^*(0, x_t(\bar{p})), x_t(\bar{p}))$ com $\Upsilon_0(\phi^{-1} \circ \lambda^*(\bar{p}), \bar{v}) = \Upsilon_0(\mathcal{H}(\bar{p})) = \mathcal{H}(\bar{p})$ é solução de (3.8). Mais ainda

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\varphi_t(\bar{p})) &= \mathcal{H}(0, x_t(\bar{p})) \\ &= (\phi^{-1} \circ \lambda^*(0, x_t(\bar{p})), x_t(\bar{p})) \\ &= \Upsilon_t(\phi^{-1} \circ \lambda^*(\bar{p}), \bar{v}) \\ &= \Upsilon_t(\mathcal{H}(\bar{p})). \end{aligned}$$

Portanto, \mathcal{H} é C^r -conjugação entre o fluxo φ_t de $g^*|_\sigma$ e o fluxo Υ_t de (3.8) restrito a s . \square

Teorema 3.3.5. *Seja σ como no Teorema 3.3.4. Suponha que $\lambda^* \neq \pm 1$ e $\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) \neq 0$ para todo $p \in \sigma$. Então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe s_ϵ uma variedade invariante de (3.6) difeomorfa a σ tal que (3.6) restrito a s_ϵ é uma ϵ -perturbação de $g^*|_\sigma$.*

Demonstração. Se $\lambda^* \neq \pm 1$ então $\phi(u) \neq \pm 1$, como ϕ é inversível sobre $(-1, 1)$ implica que $u \in (-1, 1)$. Por outro lado, de $\phi'(s) > 0$ para cada $s \in (-1, 1)$ segue $\phi'(u) > 0$. Assim $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) \cdot \phi'(u) \neq 0$. Isto, por definição, implica que s é normalmente hiperbólica, logo o Teorema 2.1.6 garante para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno a existência de s_ϵ uma variedade localmente invariante de (3.6) e difeomorfa a s tal que os fluxos de (3.6) sobre s_ϵ são uma ϵ -perturbação dos fluxos de (3.8) sobre s . Da parte (b) do Teorema 3.3.4 temos que σ é difeomorfa a s . Portanto, concluímos que σ é difeomorfa a s_ϵ e que os fluxos de (3.6) sobre s_ϵ são uma ϵ -perturbação dos fluxos de $g^*|_\sigma$. \square

Observação 3.3.6. Pelo Teorema 2.1.8 podemos garantir que s_ϵ e s_0 tem as mesmas propriedades de estabilidade com respeito a (3.7) e (3.9), respectivamente. O anterior nos dá informação sobre o comportamento dos fluxos fora das variedades s_ϵ e s_0 .

3.4 Soluções, estabilidade e singularidades

Nesta seção explicaremos como a presença de vários modos de deslize afeta a dinâmica de um sistema descontínuo, isto é, como podem evoluir as soluções de um sistema quando dois ou mais modos de deslize estão presentes.

Utilizaremos a regularização e os resultados da seção 3.3 como motivação, a fim de descrever soluções consistentes para (1.1) quando consideramos uma combinação não linear (3.1). Com efeito, escrevendo $h(\mathbf{x}) = x_1$, fazendo $\lambda = x_1/\epsilon$ para $\epsilon > 0$ e considerando ϕ em (3.6) como sendo a função identidade em $(-1, 1)$, obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{\lambda} &= g_1(\lambda; \mathbf{x}) = \frac{1+\lambda}{2} F_1^+(\lambda; \mathbf{x}) + \frac{1-\lambda}{2} F_1^-(\lambda; \mathbf{x}) + G_1(\lambda; \mathbf{x}) \\ \dot{x}_i &= g_i(\lambda; \mathbf{x}) = \frac{1+\lambda}{2} F_i^+(\lambda; \mathbf{x}) + \frac{1-\lambda}{2} F_i^-(\lambda; \mathbf{x}) + G_i(\lambda; \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde $i = 2, \dots, n$ e as variáveis do sistema são $(\lambda, \mathbf{x}) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ para cada $\mathbf{x} = (x_2, \dots, x_n)$. Tomando $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.10) obtemos uma transição instantânea e esse é nosso limite de interesse.

$$\begin{aligned}0 &= g_1(\lambda; \mathbf{x}) = \frac{1+\lambda}{2} F_1^+(\lambda; \mathbf{x}) + \frac{1-\lambda}{2} F_1^-(\lambda; \mathbf{x}) + G_1(\lambda; \mathbf{x}) \\ \dot{x}_i &= g_i(\lambda; \mathbf{x}) = \frac{1+\lambda}{2} F_i^+(\lambda; \mathbf{x}) + \frac{1-\lambda}{2} F_i^-(\lambda; \mathbf{x}) + G_i(\lambda; \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (3.11)$$

A existência de variedades lentas e localmente invariantes para (3.11) já está demonstrada a partir dos Teoremas 3.3.5 e 3.3.5. Assim, (3.11) fornece uma alternativa para descrever como evoluem as soluções de (1.1) mediante (3.1), especialmente quando vários modos de deslize são introduzidos.

Observe que realmente o que estamos fazendo é ampliar a variedade Σ em uma dimensão por $[-1, 1] \times \Sigma$. Em outras palavras, estamos fazendo um blow-up de Σ^{ns} a fim de usar os problemas de perturbação singular para ilustrar uma forma de definir soluções consistentes sobre Σ^{ns} , como mostraremos no exemplo 3.4.4.

Definição 3.4.1. Dado $\mathbf{x} \in \Sigma^{ns}$, dizemos que o modo de deslize $g(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x}))$ é atrator se $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{K}(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x})) < 0$ e repulsor se $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{K}(\mathbf{x}; \lambda^*(\mathbf{x})) > 0$.

A Definição 3.4.1 nos diz quando o modo de deslize atrai ou repele o fluxo fora de Σ . Aliás, observamos que os pontos onde os modos de deslize não repele nem atrai são um novo tipo de singularidades. A seguir classificamos as singularidades para sistemas descontínuos estudados em $h = 0$ mediante (3.1).

Definição 3.4.2. Dada uma combinação não linear (3.1) tal que $\Sigma^{ns} = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \dots \cup \sigma_r$. Dizemos que $p \in \sigma_i$ é uma *singularidade* de $g(p; \lambda^*(p))$ se alguma das seguintes condições for verificada:

- (i) $g(p; \lambda_i^*(p)) = 0$ (Pseudo Equilíbrio),
- (ii) $p \in \{(\lambda_i^*)^{-1}(\{\pm 1\})\}$ (Tangências de F^\pm),
- (iii) $\frac{d}{d\lambda} \mathcal{K}(p; \lambda^*(p)) = 0$ (Tangência de deslize).

Observação 3.4.3. Observamos que as singularidades em (i) representam simplesmente um equilíbrio do modo não linear de deslize $g(p; \lambda_i^*(p))$ e em (iii) são tangências deslizantes de $g(p; \lambda_i^*(p))$ as quais representam possíveis pontos de escape do fluxo. Os pontos $p_1 \in \sigma_1$ e $p_2 \in \sigma_2$ da Figura 17 representam singularidades do tipo (ii) e (iii), respectivamente.

Exemplo 3.4.4. Consideremos o sistema no plano $(\dot{x}, \dot{y}) = (2\lambda^2 - 1, 2\lambda^2 - \lambda - x)$ tal que $\lambda = \text{sign}(y)$. Observamos que a descontinuidade é $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ e que podemos escrever o sistema na forma de (3.1)

$$(\dot{x}, \dot{y}) = (1, 2 - \lambda - x) - 2(1 - \lambda^2)(1, 1). \quad (3.12)$$

Aqui $h(x, y) = y$, $F^- = (1, 3 - x)$, $F^+ = (1, 1 - x)$, $g = (-2, -2)$ e $\gamma(\lambda) = 1 - \lambda^2$. Vamos estudar $Z = (F^+, F^-)$ a partir de (3.12).

Utilizando (3.1) queremos resolver $\mathcal{K}(x, y; \lambda) = 0$ em λ , obtendo $2\lambda^2 - \lambda - x = 0$ logo $\lambda^\pm = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{1 + 8x})$ que tem soluções reais se $x \geq -1/8$, por outro lado a condição $\lambda^\pm \in [-1, 1]$ implica $x \leq 3$ e $x \leq 1$. Então obtemos $\Sigma^{ns} = \{x : -1/8 \leq x \leq 3\}$, $\Sigma^{nc} = \{x : x < -1/8 \text{ e } x > 3\}$ e $x = -1/8$ é uma singularidade do tipo (iii). Os modos não lineares de deslize são

$$g^1(x; \lambda^+) = \left(-\frac{3}{4} + x + \frac{\sqrt{1 + 8x}}{4}, 0\right) \quad \text{e} \quad g^2(x; \lambda^+) = \left(-\frac{3}{4} + x - \frac{\sqrt{1 + 8x}}{4}, 0\right)$$

que se anulam em $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, respectivamente. Desta forma esses pontos são singularidades do tipo (i). Observe que esses modos correspondem a $\lambda^+ : \sigma_1 \rightarrow [-1, 1]$ e $\lambda^- : \sigma_2 \rightarrow [-1, 1]$, respectivamente, onde $\sigma_1 = \{-1/8 \leq x \leq 1\}$ e $\sigma_2 = \{-1/8 \leq x \leq 3\}$.

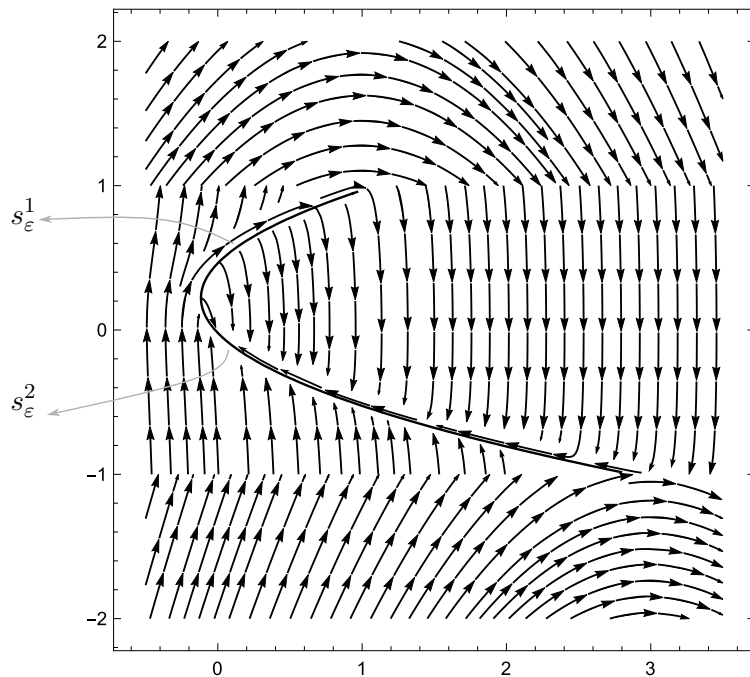
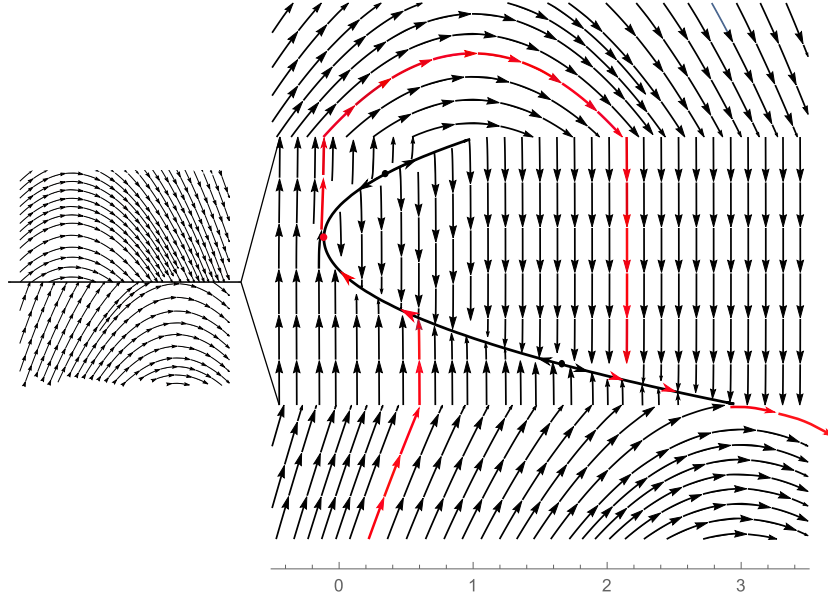
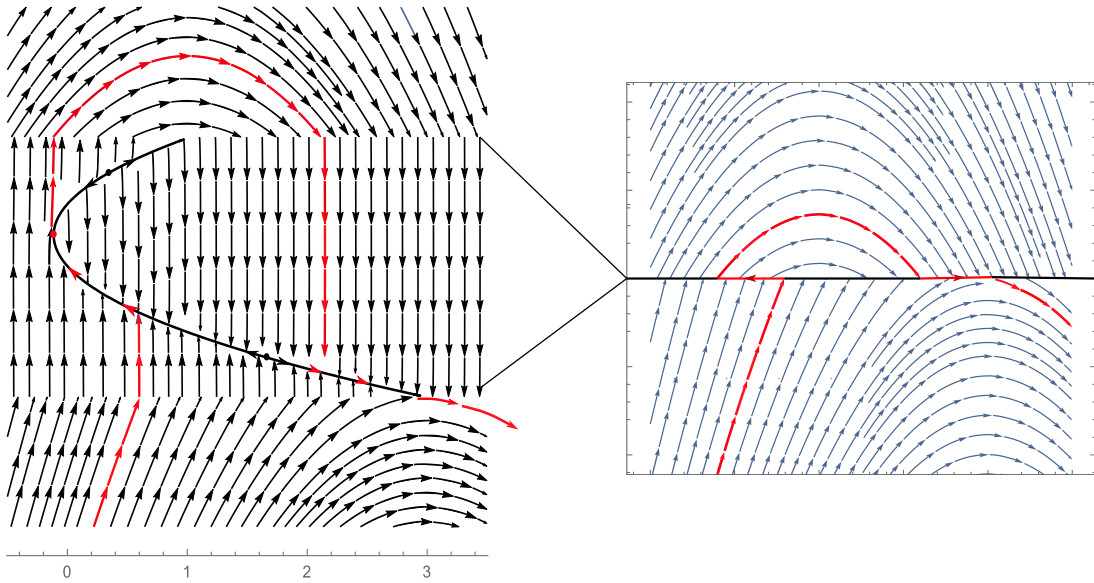


Figura 19 – A figura mostra a dinâmica dos sistemas rápido-lento e as variedades s_ϵ^1 e s_ϵ^2 .

Pelo Teorema 3.3.5 temos que para conjuntos compactos $N_1 \subset \sigma_1$ e $N_2 \subset \sigma_2$ existem variedades s_ε^1 e s_ε^2 difeomorfas a N_1 e N_2 , respectivamente, tais que os fluxos sobre s_ε^1 e s_ε^2 são uma ε -perturbação dos fluxos de $g^1|_{N_1}$ e $g^2|_{N_2}$. Na Figura 19 se ilustra a dinâmica do sistema lento sobre s_ε^1 e s_ε^2 e também a dinâmica do sistema rápido (fora de s_ε^1 e s_ε^2). Por outro lado, as trajetórias do sistema rápido em vizinhanças de s_ε^1 são repulsoras enquanto que as trajetórias em vizinhanças de s_ε^2 estão sendo atraídas para ela.

Figura 20 – Blow-up de Σ^{ns}

Na Figura 20 ilustramos como evolui uma solução de (3.12) a partir dos problemas limite singulares. Observe que quando o fluxo do modo de deslize recai na singularidade $x = -1/8$ então ele eventualmente sai da variedade por uma trajetória do sistema layer.

Figura 21 – Blow-down de Σ^{ns}

Finalmente na Figura 21 mostramos como é realmente descrita a solução mediante os modos de deslize, assim vemos que na solução a transição entre uma trajetória do problema lento e rápido corresponde a um instante de tempo nulo.

4 Oscilador Amortecido

Neste último capítulo analisaremos o comportamento de um objeto que se move sobre uma superfície rugosa e que está ligado a uma mola e um amortecedor. Iniciaremos introduzindo o modelo e explicando como ele determina um sistema suave por partes. Em seguida, estudaremos o espaço de fase do sistema mediante a combinação de Filippov (1.2) e os modos não lineares de deslize (3.1). Finalmente, iremos comparar os resultados obtidos em ambos casos em termos da interpretação do modelo.

4.1 Introdução ao modelo

Primeiramente introduziremos alguns conceitos importantes:

- A força de atrito é uma força que se opõe ao movimento lateral relativo entre duas superfícies sólidas em contato. Esta força pode ser um *atrito estático* que ocorre quando não há “deslizamento” entre as duas superfícies em contato, o qual pode acontecer se os dois objetos estão em repouso um em relação ao outro ou também quando a velocidade relativa entre os dois corpos é zero. Além disso, podemos ter um *atrito cinético* que ocorre quando há deslizamento entre as duas superfícies em contato.
- A fricção de Coulomb refere-se a um modelo simples de fricção de objetos sobre superfícies não rugosas que é bastante preciso empiricamente. Especificamente é um modelo que ajuda a prever a magnitude e direção da força de atrito entre corpos com superfícies lisas em contato.

O modelo que estamos interessados em estudar aqui é um sistema do tipo massa-mola-amortecedor (Dry-Friction Oscillator), nossa ideia não é criar um modelo de fricção totalmente realista, dado que o problema de modelar a dinâmica da força de fricção entre dois corpos é extremamente complexo e pode ser afetado por muitos fatores, como por exemplo, a inércia, efeitos térmicos, a rugosidade da superfície de contato, entre outros.

Além disso, os modelos teóricos e experimentais de fricção são diversos (ver por exemplo [4]) e uma revisão deles está fora de nosso interesse. Porém, a maioria dos modelos mantém alguma semelhança com o modelo de fricção de Coulomb (ver [8] e [12]), no qual a força de atrito resiste a direção do movimento, isto significa que a força de contato entre dois objetos muda abruptamente conforme a direção relativa ao movimento muda.

Para nosso problema, consideremos um bloco de massa m ligado a uma mola de rigidez k ajustada a um suporte fixo e um amortecedor com coeficiente c . O bloco está sobre uma esteira conduzida por dois rolos que se movem com uma velocidade constante v_0 .

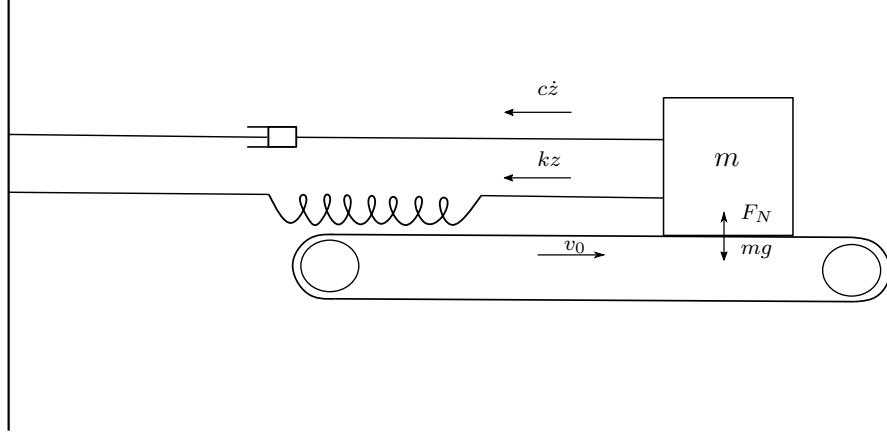


Figura 22 – Bloco sobre uma esteira em movimento.

Como se ilustra na Figura 22, a posição do bloco sobre a esteira é representada por z com velocidade \dot{z} . A equação do movimento do bloco é dada por

$$m\ddot{z}(t) = -kz(t) - c\dot{z}(t) - F(t),$$

onde $k, m > 0$, $c^2/(km) < 4$ e F é a força de atrito entre o bloco e a esteira. Assim denotando a velocidade relativa entre os dois objetos por $u = \dot{z} - v_0$, temos que a força de atrito é modelada por

$$F(u) = F_N \times \begin{cases} \mu_k, & \text{se } u > 0 \\ -\mu_k, & \text{se } u < 0 \\ \mu_s, & \text{se } u = 0 \end{cases}$$

sendo F_N a força normal exercida pela esteira sobre o bloco, μ_k (coeficiente de atrito cinético) e μ_s (coeficiente de atrito estático), os quais serão considerados como sendo constantes.

Agora, baseados nas considerações feitas no modelo, ele pode ser descrito como a seguinte EDO

$$\begin{aligned} \dot{z} &= u + v_0 \\ \dot{u} &= -\frac{F(u)}{m} - \frac{k}{m}z - \frac{c}{m}(u + v_0). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Observação 4.1.1. O amortecedor considerado no modelo dissipa energia do sistema, isto é, absorve energia mediante a fricção gerada pelo movimento do bloco sobre a esteira. Se não estivéssemos considerando um amortecedor, então o deslizamento do bloco sobre a superfície seria periódico e, portanto, o sistema resultante quanto sua análise mudaria, como por exemplo em [12].

Observe que (4.1) é um sistema suave por partes com descontinuidade em $u = 0$. Sabemos que existem um coeficiente de atrito estático μ_s (quando não há deslizamento do bloco sobre a esteira) e um coeficiente de atrito cinético μ_k (quando há deslizamento). A força de atrito estático é $\mu_s F_N$, inicialmente quando o bloco está estagnado sobre a esteira a força do sistema é menor que $\mu_s F_N$, então para que o bloco comece a se mover é necessário aplicar uma força máxima que supere o atrito estático. Uma vez que o bloco começa a deslizar-se, o atrito estático não é mais aplicável e a força de atrito nesse caso é $\pm \mu_k F_N$. Portanto, temos neste modelo um sistema descontínuo, no sentido que cada vez que a força imposta sobre o bloco é o suficientemente grande para superar o atrito estático, a força de atrito muda de $\mu_s F_N$ para $\pm \mu_k F_N$. Em outras palavras, a descontinuidade no sistema surge cada vez que temos uma transição entre o regime cinético e estático. Fatos empíricos mostram que $\mu_s > \mu_k$.

4.2 Análise do modelo mediante as convenções de Filippov

Nesta seção analisamos (4.1) utilizando a teoria dos sistemas dinâmicos suaves por partes introduzida no Capítulo 1. Em particular, estamos interessados em estudar o retrato de fase do sistema na descontinuidade.

Primeiro vamos simplificar (4.1). De fato, considerando um reescalonamento do tempo $t = \ell \tau$, introduzindo a variável $y = u/\beta$ ($\beta \neq 0$), fazendo a mudança de variável $z = \alpha x$ ($\alpha \neq 0$), sendo $\ell = \sqrt{m/k}$, $\alpha = v_0 \sqrt{m/k}$ e $\beta = v_0$. Finalmente simplificando podemos reescrever (4.1) na seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 1 \\ \dot{y} &= -x - \omega(y - 1) - \tilde{F}(y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\text{onde } \omega = c \sqrt{\frac{1}{km}}, \quad F_N = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{F}(y) = \begin{cases} \tilde{\mu}, & \text{se } y > 0 \\ -\tilde{\mu}, & \text{se } y < 0 \\ \tilde{\mu}_s, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Observe que as condições impostas implicam que $-2 < \omega < 2$. Aliás, aqui $\tilde{\mu}$ representa o coeficiente de atrito cinético e $\tilde{\mu}_s$ o coeficiente de atrito estático. Logo definindo

$$F^+(x, y) = (y - 1, -\tilde{\mu} - x - \omega(y - 1)), \quad F^-(x, y) = (y - 1, \tilde{\mu} - x - \omega(y - 1))$$

a convenção de Filippov nos diz que para $y = 0$ consideremos a combinação linear

$$f(x, y; \lambda) = (y - 1, -x - \omega(y - 1)) + (0, -\tilde{\mu})\lambda,$$

com $\lambda \in [-1, 1]$. Além disso, sabemos que as soluções para (4.2) são definidas como sendo soluções da inclusão $\dot{x} \in \mathcal{F}_Z(x, y)$. Como $\lambda = \text{sign}(y)$, o modo linear de deslize é

determinado resolvendo

$$\langle \nabla h(x, y), f(x, y; \lambda) \rangle = 0 \quad \text{em} \quad y = 0 \quad \implies \lambda^s = \frac{-x + \omega}{\tilde{\mu}}.$$

Porém, devemos ter $\lambda^s \in (-1, 1)$, daí obtemos que

$$\lambda > -1 \implies x > \omega - \tilde{\mu} \quad \text{e} \quad \lambda < 1 \implies x < \omega + \tilde{\mu}.$$

Logo, encontramos que $\Sigma^s = \{(x, 0) \in \Sigma : x \in (\omega - \tilde{\mu}, \omega + \tilde{\mu})\}$ e $\Sigma^c = \{(x, 0) \in \Sigma : x > \omega + \tilde{\mu} \text{ ou } x < \omega - \tilde{\mu}\}$. Por outro lado, como se mostra na Figura 23 os pontos $x_1 = \omega - \tilde{\mu}$ e $x_2 = \omega + \tilde{\mu}$ são dobras visível e invisível respectivamente, além disso, as trajetórias para os pontos $(x, 0) \in \Sigma^c$ tais que $x < \omega - \tilde{\mu}$ cruzam de $y < 0$ para $y > 0$ e as trajetórias para pontos $(x, 0) \in \Sigma^c$ tais que $x > \omega + \tilde{\mu}$ cruzam de $y > 0$ para $y < 0$.

Agora se considerarmos o sistema linear $(\dot{x}, \dot{y}) = F^+(x, y)$ com $(x_0, y_0) = (\omega - \tilde{\mu}, 0)$ então pela fórmula de variação de parâmetros encontramos $\varphi^+(t, 0, (\omega - \tilde{\mu}, 0)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ a solução para esse sistema linear, onde

$$\varphi_2(t) = 1 + e^{-(t\omega/2)} \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-\omega^2}\right) - \frac{\omega \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-\omega^2}\right)}{\sqrt{4-\omega^2}} \right],$$

daí queremos verificar que $\varphi_2(t) > 0$ para todo $t > 0$. Para mostrar isso, calculamos

$$\varphi_2'(t) = \frac{2e^{-\frac{t\omega}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\sqrt{4-\omega^2}\right)}{\sqrt{4-\omega^2}},$$

logo achamos que os pontos críticos de $\varphi_2(t)$ são $t_n = \frac{2n\pi}{\sqrt{4-\omega^2}}$, com $n \in \mathbb{Z}^+$. Por outro lado, como

$$\varphi_2(t_n) = 1 + (-1)^{(1+n)} e^{-(n\pi\omega)/\sqrt{4-\omega^2}},$$

então segue que $\varphi_2(t_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e portanto concluímos que $\varphi_2(t) > 0$ para todo $t > 0$. Isto implica que considerando uma combinação linear (1.2) não podemos garantir a existência de orbitas periódicas em Σ^s . Baseado no anterior temos que sobre Σ^s o sistema segue o fluxo dado pelo campo deslizante, porém uma vez que chega no ponto $(\omega - \tilde{\mu}, 0)$ continua pelo fluxo do campo F^+ até ser atraído por $(-\tilde{\mu}, 1)$, o único equilíbrio de (4.2), como se visualiza no exemplo da Figura 23.

Por outra parte, no ponto $(\omega - \tilde{\mu}, 0)$ temos que \dot{x} é constante, logo a partir de (4.2) obtemos que $\dot{y} = -x + \tilde{\mu} - \omega + \omega - \tilde{\mu}_s = \ddot{x} = 0$, então mostramos que $\tilde{\mu}_s = \tilde{\mu}$.

Para entender melhor os resultados dos dois parágrafos anteriores vamos considerar o seguinte exemplo. Se tomarmos os valores particulares $\omega = 3/10$, $\tilde{\mu} = 1$, os quais resultam

de forma conveniente para a ilustração mas não crucial para os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - 1 \\ \dot{y} &= -x - \frac{3}{10}(y - 1) - \tilde{F}(y). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Então achamos $\Sigma^s = \{(x, 0) : x \in (-7/10, 13/10)\}$ e $\Sigma^c = \{(x, 0) : x > 13/10 \text{ ou } x < -7/10\}$.

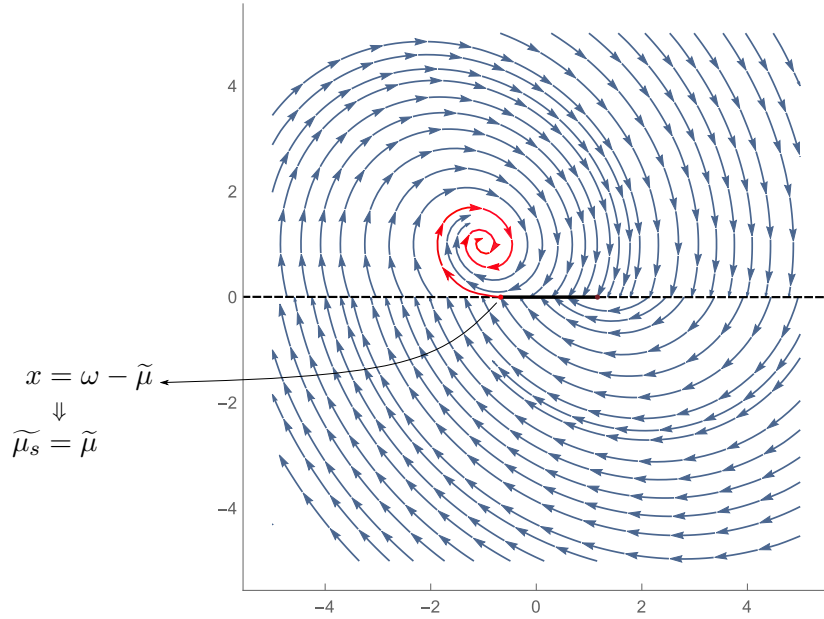


Figura 23 – Espaço de fase do sistema (4.3) mediante (1.2).

Observação 4.2.1. A Figura 23 ilustra o fluxo cruzando de $y > 0$ para $y < 0$ se $x > 13/10$ e de $y < 0$ para $y > 0$ se $x < -7/10$. Enquanto que para Σ^s o fluxo se desliza até atingir $x = -7/10$ e logo recair no equilíbrio $(-1, 1)$ de F^+ . Neste caso $\tilde{F} \in [-1, 1]$.

Observação 4.2.2. A interpretação do retrato de fase deste exemplo em termos do modelo nos diz que em Σ a velocidade relativa é zero, logo não há movimento do bloco. Porém nas regiões de costura o bloco pode mudar o deslizamento da esquerda para a direita ou da direita para esquerda. Ainda mais, da Figura 23 observamos que existem trajetórias de F^+ começando em alguns pontos $(x, 0) \in \Sigma^c$ com $x < -7/10$ que logo recaem em Σ^s , que significa que em certos instantes de tempo o bloco passa de deslizar-se na esteira a estagnar-se nela para eventualmente continuar deslizando-se até ficar em equilíbrio.

Portanto mediante a convenção de Filippov obtemos que a transição entre o regime cinético e estático no modelo ocorre na dobra $x = \omega - \tilde{\mu}$. Além disso, mostramos que $\tilde{\mu}_s = \tilde{\mu}$ então temos que esta análise desconsidera o atrito estático o qual é consistente para um modelo de fricção entre superfícies lisas (modelo de fricção de Coulomb) onde a descontinuidade acontece cada vez que a força de atrito salta abruptamente entre $-\tilde{\mu}$ e $\tilde{\mu}$, porém não é adequado para modelar um problema que considere os dois regimes de atrito.

4.3 Análise do modelo assumindo modos não lineares de deslize

A partir da descrição do modelo vimos que o bloco pode deslizar-se sobre a esteira ou também pode ficar estagnado nela se $y = \dot{x} - v = 0$. Nesta seção analisamos o comportamento das trajetórias do espaço de fase de (4.2) utilizando a teoria introduzida no Capítulo 3, especialmente estamos interessados em estudar a região onde ocorre a transição entre o regime cinético e estático. Além disso, veremos que considerando uma combinação não linear (3.1) podemos tratar o excesso de atrito estático obtendo assim uma variação entre os regimes cinético-estático do bloco que se ajusta melhor ao comportamento real do modelo.

Aqui, novamente $F^+(x, y) = (y-1, -\tilde{\mu}-x-\omega(y-1))$ e $F^-(x, y) = (y-1, \tilde{\mu}-x-\omega(y-1))$, mas em $y = 0$ consideraremos

$$g(x, y; \lambda) = f(x, y) + \Gamma(x, y; \lambda) \cdot (1 - \lambda^2), \quad \lambda \in [-1, 1]$$

e a força de atrito como sendo

$$\tilde{F}(y) = F_N \times \begin{cases} \tilde{\mu}, & \text{se } y > 0 \\ -\tilde{\mu}, & \text{se } y < 0 \\ \mu_s, & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Agora tomaremos outra vez os valores particulares $\tilde{\mu} = 1$, $F_N = 1$, $\omega = 3/10$ para obter e estudar (4.3). Porém, considerando $\mu_s = 3$ e $\Gamma(x, y; \lambda) = (0, -7\lambda)$, segue que

$$g(x, y; \lambda) = (y-1, -x-3/10(y-1)) + (0, -\lambda) + (0, -7\lambda) \cdot (1 - \lambda^2), \quad \lambda \in [-1, 1]$$

onde $\lambda = \text{sign}(y)$. Isto implica que em $y = 0$ temos

$$\mathcal{K}(x, 0; \lambda) = -x + \frac{3}{10} - 8\lambda + 7\lambda^3,$$

logo para $\mathcal{K}(x, 0; \lambda) = 0$ obtemos três soluções $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ e as condições $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [-1, 1]$ implicam que $x \geq -3$ e $x \leq 3.6$ daí achamos que $\Sigma^{ns} = \{(x, 0) \in \Sigma : x \in [-3, 3.6]\}$, isto é, a região de deslize é maior comparado com a obtida na seção 4.2. Além disso, temos que para $-3 < x < -0.7$ e $1.3 < x < 3.6$ existem dois modos de deslize enquanto que para pontos $-0.7 < x < 1.3$ existe um único modo de deslize.

Se consideramos o sistema linear $(\dot{x}, \dot{y}) = F^+(x, y)$ com a condição inicial $(x_0, y_0) = (-3, 0)$, achamos que sua solução é dada por $\psi^+(t, 0, (x_0, y_0)) = (x(t), y(t))$, onde

$$y(t) = 1 + \frac{1}{391} e^{\frac{-3}{20}t} \left[-391 \cos\left(\frac{\sqrt{391}t}{20}\right) + 43\sqrt{391} \sin\left(\frac{\sqrt{391}t}{20}\right) \right].$$

Observamos que $y(t)$ é uma função diferenciável em \mathbb{R} e $y(1) \approx 2.09023$, $y(-1) \approx -1.74918$, então pelo Teorema do valor intermediário podemos garantir que existe algum

$c \in (-1, 1)$ tal que $y(c) = 0$. Assim, neste caso o fluxo que chega a Σ^{ns} pode-se deslizar até atingir a dobra $x = -3$, que é ponto de transição entre o regime estático e cinético, para logo entrar em uma órbita periódica em Σ^{ns} , como se mostra nas Figuras 24 e 25.

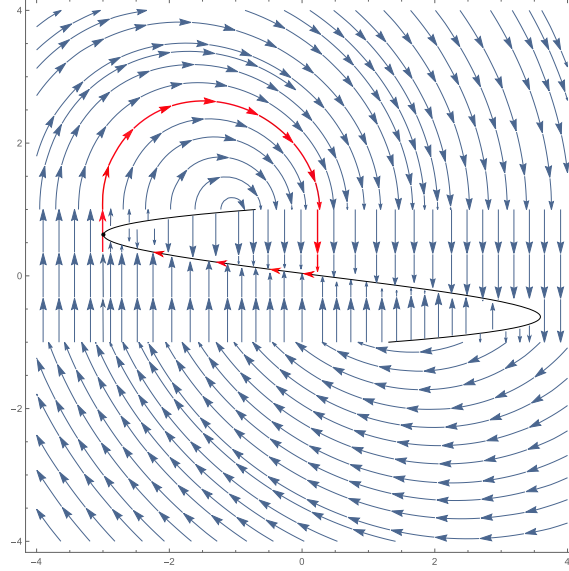


Figura 24 – Espaço de fase de (4.3) considerando a combinação não linear em $y = 0$. Na figura se ilustra mediante um blow-up a existência de uma órbita periódica em Σ^{ns} . Aqui $\tilde{F} \in [-3, 3]$.

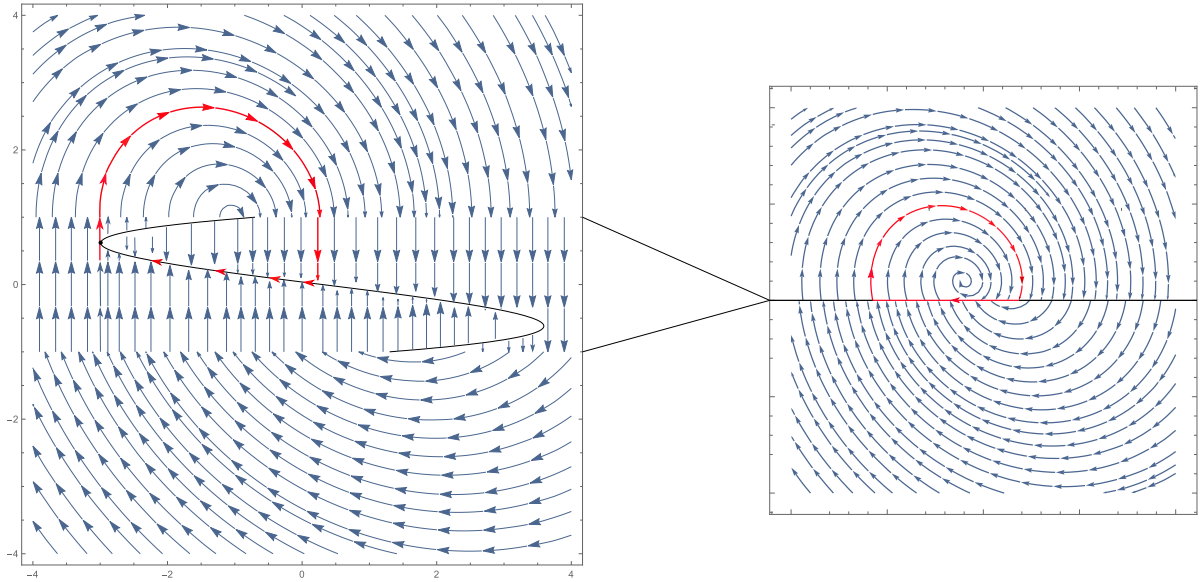


Figura 25 – Órbita periódica em Σ^{ns} .

Observamos que nesta abordagem se requer uma força maior $x \simeq -3$ para conseguir superar o atrito estático. A existência da órbita periódica significa que no modelo temos uma fase de deslize-estagnamento do bloco na qual a força de atrito varia entre $\tilde{\mu}_s$ e $\pm\tilde{\mu}$,

sendo consistente com um modelo que considera as duas forças de atrito estática e cinética. Além disso, este exemplo fornece um resultado qualitativamente diferente comparado com o resultado encontrado em geral mediante a convenção de Filippov.

Em conclusão, temos que a análise da seção 4.2 serve para estudar um modelo simples de fricção cinética de Coulomb e por outro lado a análise mediante os modos não lineares de desliz é consistente com um modelo que considera os dois regimes de atrito. Portanto a principal motivação para estudar este tipo de extensão da convenção de Filippov é que nos permite modelar de forma mais adequada alguns problemas aplicados que determinam sistemas descontínuos.

Referências

- [1] J. P. Aubin and A. Celina. *Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory*. Springer Verlag, 1984.
- [2] C. A. Buzzi, P. R. da Silva, and M. A. Teixeira. A singular approach to discontinuous vector fields on the plane. *J. Differential Equations* 231(2), pages 633–655, 2006.
- [3] P. T. Cardin and M. A. Teixeira. Fenichel theory for multiple time scale singular perturbation problems. *Siam Journal on Applied Dynamical Systems*, 16:1425–1452, 2017.
- [4] B. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs, and K. Popp. A historical review on dry friction and stick-slip phenomena. *Applied Mechanics Reviews* 51(5), pages 321–341, 1998.
- [5] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *J. Differential Equations* 31, pages 53–98, 1979.
- [6] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- [7] M. R. Jeffrey. Hidden dynamics in models of discontinuity and switching. *Phys. D: Nonlinear Phenomena*, 273/274, 2014.
- [8] M. R. Jeffrey. Hidden dynamics of dry-friction oscillators. *In 11th International Conference on Engineering Vibration*, 2015.
- [9] M. R. Jeffrey and P. Glendinning. *An Introduction to Piecewise Smooth Dynamics*. Notes from the Advanced Courses in Mathematics-CRM Barcelona. June 29, 2016.
- [10] M. R. Jeffrey and D. J. W. Simpson. Nonfilippov dynamics arising from the smoothing of nonsmooth systems, and its robustness to noise. *Nonlinear Dynamics* 76(2), page 1395–1410, 2014.
- [11] C. K. R. T. Jones. Geometric singular perturbation theory. *Dynamical systems*, 1609:44–118, 1995.
- [12] R. Lima and R. Sampaio. Analysis of a dry-friction oscillator driven by a stochastic base motion. *In Proceedings of the third International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*, 2016.

- [13] J. Llibre, P. R. da Silva, and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields on \mathbb{R}^3 via singular perturbation. *J. Dynam. Differential Equations* 19(2), page 309–331, 2007.
- [14] J. Llibre, A. C. Mereu, and D. D. Novaes. Averaging theory for discontinuous piecewise differential systems. *J. Differential Equations* 258, page 4007–4032, 2015.
- [15] D. D. Novaes and M. R. Jeffrey. Regularization of hidden dynamics in piecewise smooth flows. *J. Differential Equation* 259, page 4615–4633, 2015.
- [16] J. Palis and W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Verlag, 1982.
- [17] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. *In International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, page 207–223, 1998.
- [18] M. A. Teixeira and P. R. da Silva. Introduction to the theory of singular perturbations. *V Workshop on Dynamical Systems*, September 25-27, 2013.